Binomická a multinomická věta; Princip inkluze a exkluze

Zdeněk Dvořák

15. října 2018

1 Binomická věta

Věta 1 (Binomická věta)**.** *Pro přirozené číslo $n \geq 1$ a $x, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

První důkaz. Koeficient u $x^k y^{n-k}$

$$\underbrace{(x+y) \cdot (x+y) \cdots (x+y)}_{n\text{-krát}}$$

je roven počtu možností, jak z n členů vybrat k těch, z nichž použijeme v roznásobení x. Počet těchto možností je $\binom{n}{k}$. □

Druhý důkaz. Indukcí dle n. Pro $n = 1$ tvrzení platí, nechť $n \geq 2$. Pak

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)\cdot(x+y)^{n-1} \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n-1}{0}y^n + \binom{n-1}{n-1}x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right)x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{n}x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.
\end{aligned}$$

□

Důsledky:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k},$$

a tedy

$$\sum_{k \text{ sudé}}\binom{n}{k} = \sum_{k \text{ liché}}\binom{n}{k}$$

Analogicky, když $k_1 + \ldots + k_p = n$:

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_p} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_p!}$$

je

- počet rozkladů n-prvkové množiny na části velikostí k_1, …, k_p
- počet řetězců délky n, v nichž se i-té písmeno vyskytuje k_i-krát (pro $i = 1, \ldots, p$).

Věta 2 (Multinomická věta)**.** *Pro přirozené číslo $n \geq 1$ a $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ platí*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_p} x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$$

2 Princip inkluze a exkluze

Pro dvě množiny A a B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Příklad 1. *Kolik je čísel mezi 1 a 100 dělitených 2 nebo 3?*

$A = \{n : 1 \leq n \leq 100, 2|n\}$, $B = \{n : 1 \leq n \leq 100, 3|n\}$
$A \cap B = \{n : 1 \leq n \leq 100, 6|n\}$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \lfloor 100/2 \rfloor + \lfloor 100/3 \rfloor - \lfloor 100/6 \rfloor = 50 + 33 - 24 = 59.$

Obecně:

Věta 3. *Nechť $A_1, \ldots, A_k$ jsou konečné množiny. Pak*

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big|\bigcap_{i \in I} A_i\Big|.$$

Důkaz. Uvažme libovolný prvek $x \in \bigcup_{i=1}^k A_i$. Nechť J je množina indexů j tž. $x \in A_j$; máme $J \neq \emptyset$. Pak $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ právě když $I \subseteq J$. Proto x je na pravé straně započítáno

$$\begin{aligned} \sum_{I \subseteq J, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} &= \sum_{t=1}^{|J|} (-1)^{t+1} \binom{|J|}{t} \\ &= 1 - \sum_{t=0}^{|J|} (-1)^t \binom{|J|}{t} = 1 - (1-1)^{|J|} = 1 \end{aligned}$$

krát. $\square$

Příklad 2. <u>Eulerova funkce</u> *$\varphi(n)$ je počet čísel mezi 1 a n, která jsou nesoudělná s n.*

Nechť $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou všechna prvočísla, která dělí n; položme $A_i = \{t : 1 \leq t \leq n, p_i|t\}$. Pak číslo x je soudělné s n, právě když je dělitelné *alespoň jedním z* $p_1, \ldots, p_k$*, tj. pokud* $x \in \bigcup_{i=1}^k A_i$*. Dále*

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I} A_i &= \{t : 1 \le t \le n,\ t \text{ je dělitelné } p_i \text{ pro } i \in I\}\\ &= \{t : 1 \le t \le n,\ t \text{ je dělitelné } \prod_{i\in I} p_i\}\end{aligned}$$

A tedy

$$\begin{aligned}\Big|\bigcup_{i=1}^k A_i\Big| &= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1}\Big|\bigcap_{i\in I} A_i\Big|\\ &= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1}\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \Big|\bigcup_{i=1}^k A_i\Big|\\ &= n - \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1}\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\\ &= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|}\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\\ &= n \cdot \prod_{i=1}^k\Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big).\end{aligned}$$

Důsledek 4. *Nechť* $A_1, \ldots, A_k$ *jsou konečné množiny. Jestliže*

$$\Big|\bigcap_{i\in I} A_i\Big| = f(|I|)$$

pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$*, pak*

$$\Big|\bigcup_{i=1}^k A_i\Big| = \bigcup_{t=1}^k (-1)^{t+1}\binom{k}{t} f(t).$$

Příklad 3. *Kolik je funkcí z m-prvkové množiny* X *do* $\{1, \ldots, k\}$*-prvkové množiny, které jsou na (neboli počet rozdělení m rozlišitelných míčků do k rozlišitelných krabic tak, aby žádná nebyla prázdná)?*

A_i *označme počet funkcí z* X *do* $\{1, \ldots, k\}$ *tž. žádný prvek se nezobrazí na* i*. Pak* $\Big|\bigcap_{i\in I} A_i\Big|$ *je počet funkcí z* X *do* $\{1, \ldots, k\}$ *tž. žádný prvek se nezobrazí do* I*, tedy počet funkcí z* X *do* $\{1, \ldots, k\} \setminus I$*, tedy* $(k - |I|)^m$.

Počet funkcí, které nejsou na, je

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{t=1}^{k}(-1)^{t+1}\binom{k}{t}(k-t)^m.$$

Počet funkcí, které jsou na, je

$$k^m - \sum_{t=1}^{k}(-1)^{t+1}\binom{k}{t}(k-t)^m = \sum_{t=0}^{k}(-1)^{t}\binom{k}{t}(k-t)^m.$$

Příklad 4. *Počet permutací na k-prvkové množině X = počet funkcí z X do X, které jsou na, je*

$$\sum_{t=0}^{k}(-1)^{t}\binom{k}{t}(k-t)^k = k!\sum_{t=0}^{k}(-1)^{t}\frac{(k-t)^k}{t!(k-t)!}.$$

Vzhledem k tomu, že tento počet je také $k!$, dostáváme

$$\sum_{t=0}^{k}(-1)^{t}\frac{(k-t)^k}{t!(k-t)!} = 1.$$

Příklad 5. *Šatnářka vybere klobouky od m lidí. Kolika způsoby jim je může vrátit tak, aby nikdo neměl vlastní klobouk? Ekvivalentně, kolik existuje permutací π čísel $\{1,\dots,m\}$ tž. $\pi(i) \neq i$ pro $i = 1,\dots,m$ (nemají pevný bod)?*

A_i označme množinu permutací π takových, že $\pi(i) = i$. Pak Pak $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ je počet permutací takových, že $\pi(i) = i$ pro každé $i \in I$. Ostatní pozice lze proházet libovolně, je jich tedy $(m-i)!$.

Počet permutací, které mají pevný bod, je

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{t=1}^{m}(-1)^{t+1}\binom{m}{t}(m-t)!.$$

Počet permutací, které nemají pevný bod, je

$$\begin{aligned} m! - \sum_{t=1}^{m}(-1)^{t+1}\binom{m}{t}(m-t)! &= \sum_{t=0}^{m}(-1)^{t}\binom{m}{t}(m-t)! \\ &= \sum_{t=0}^{m}(-1)^{t}\frac{m!}{t!} \\ &= m!\sum_{t=0}^{m}(-1)^{t}\frac{1}{t!}. \end{aligned}$$

Poznámka: $\left|e^{-1} - \sum_{t=0}^{m}(-1)^t\frac{1}{t!}\right| \leq \frac{e}{(m+1)!} \leq 0.005$ *pro $m \geq 5$; proto skoro přesně $100e^{-1} \approx 37\%$ permutací nemá pevný bod.*