Funkce; Kombinatorické počítaní

Zdeněk Dvořák

15. října 2018

1 Funkce

Relace $f \subseteq X \times Y$ je funkce, jestliže pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ tž. $(x, y) \in f$. Existuje-li, píšeme $f(x) = y$. Množina X je definiční obor f, množina Y je obor hodnot. Značení $f : X \to Y$.

Příklad 1.
$p : \{1,2,3,4,5\} \to \{0,1\}$, $p = \{(1,0),(2,1),(3,1),(4,0),(5,1)\}$.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$; *tj. relace* $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.
$h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$; *tj. relace* $\{(x, 1/x) : x \in \mathbb{N}\}$.
$r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $r(x) = 1/x$; *tj. relace* $\{(x, 1/x) : x \in \mathbb{R}^+\}$.

- f je na (surjektivní), jestliže pro každé $y \in Y$ existuje (alespoň jedno) $x \in X$ tž. $f(x) = y$.
- f je prostá (injektivní), jestliže pro každá $x_1, x_2 \in X$ tž. $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, tj. pro každé $y \in Y$ existuje nejvýše jedno $x \in X$ tž. $f(x) = y$.
- f je vzájemně jednoznačné (bijektivní), jestiže je zároveň surjektivní a injektivní, tj. pro každé $y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$ tž. $f(x) = y$.

Příklad 2. *Pro konečnou množinu X je funkce $f : X \to X$ prostá právě tehdy, když je na. Pro nekonečné X neplatí.*

Pro $f : X \to Y$ je f^{-1} funkce právě když f je bijektivní; v tom případě $f^{-1} : Y \to X$ je také bijektivní.

Pro $f : X \to Z$ a $g : Z \to Y$ je $f \circ g : X \to Z$ funkce, splňuje $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

2 Kombinatorické počítání

Příklad 3. *Kolik je řetězců délky n z písmen* **A**, **B** *a* **C**, *které nekončí na* **A** *a písmeno* **A** *se v nich nevyskytuje dvakrát po sobě?*

- *hrubou silou:*
  - $S(1) = 2$: *B, C*
  - $S(2) = 6$: *AB, AC, BB, BC, CB, CC*
  - $S(3) = 16$: *všechny až na* **AAB**, **AAC**, **XYA** *pro* $\mathtt{X}, \mathtt{Y} \in \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}\}$
  - ...
- *rekurzivním vzorcem:* $S(1) = 2$, $S(2) = 6$ *a*

$$S(n) = 2S(n-1) + 2S(n-2)$$

  pro $n \geq 3$.

- *přesným vzorcem:*

$$S(n) = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot (1+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot (1-\sqrt{3})^n$$

- *přibližným odhadem:*

$$S(n) \approx \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot (1+\sqrt{3})^n$$

2.1 Základní vztahy

Počet dvojic (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$, je $|A||B|$.

Počet k-tic $(a_1, \ldots, a_k)$, kde $a_i \in A_i$, je $\prod_{i=1}^{k} |A_i|$.

Pro n-prvkovou množinu A:

- počet k-tic prvků z A
- počet prvků kartézského součinu $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{k\text{-krát}} = A^k$
- počet řetězců délky k z písmen v A
- počet způsobů, jak z A vybrat k prvků s povoleným opakováním
- počet funkcí z $\{1, \ldots, k\}$ do A

je m^k.

n-prvková množina má 2^n podmnožin

Pro n-prvkovou množinu A:

- počet uspořádání prvků A
- počet bijekcí z $\{1, \dots, n\}$ do A
- počet bijekcí z A do A

je $n(n-1)\cdots 1 = n!$.

Poznámka:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Permutace na konečné množině A je bijekce z A do A.

Pro n-prvkovou množinu A:

- počet k-tic navzájem různých prvků z A
- počet řetězců délky k z navzájem různých písmen v A
- počet způsobů, jak z A vybrat k prvků bez opakování
- počet prostých funkcí z $\{1, \dots, k\}$ do A

je $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Binomický koeficient $\binom{n}{k}$ je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.

Lemma 1.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Důkaz. Z n-prvkové množiny lze vybrat k prvků bez opakování tak, že nejprve vybereme k-prvkovou podmnožinu a tu uspořádáme, tedy $\binom{n}{k}\cdot k!$ způsoby. Jak jsme dříve nahlédli, tento počet je roven $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. □

Základní vzahy:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$$

Poznámka:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$$

2.2 Rozdělování míčků do krabic

Máme m míčků očíslovaných od 1 do m a k krabic očíslovaných od 1 do k. Počet způsobů, jak rozdělit míčky do krabic

- libovolně: k^m (počet funkcí)
- do každé krabice nejvýše jeden: $k!/(k-m)!$ (počet prostých funkcí)
- do každé krabice alespoň jeden: příště (počet funkcí, které jsou na)

Máme m identických míčků a k krabic očíslovaných od 1 do k. Počet způsobů, jak rozdělit míčky do krabic

- libovolně: $\binom{m+k-1}{k-1}$ (na $m+k-1$ pozicích máme $k-1$ stěn krabic)
- do každé krabice nejvýše jeden: $\binom{k}{m}$ (vybereme obsazené krabice)
- do každé krabice alespoň jeden: $\binom{m-1}{k-1}$ (rozdělíme $m-k$ míčků libovolně a pak do každé krabice jeden přidáme)

Cvičení (některé podpřípady jsou těžké): co když jsou i krabice nerozlišitelné?