Relace

Zdeněk Dvořák

17. října 2018

Definice 1. *Binární relace R mezi množinami X a Y je podmnožina $X \times Y$.*
Binární relace R na množině X je podmnožina $X \times X$.
Místo $(x, y) \in R$ píšeme xRy.

Relace s vyšší aritou (množiny k-tic); nebudeme se jimi teď zabývat.

Příklad 1.
$\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ *je relace mezi* $\{1, 2, 3\}$ *a* $\{a, b, c\}$.
Rovnost na libovolné množině M:

$$\{(x, x) : x \in M\}.$$

Dělitelnost v přirozených číslech:

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x|y\}.$$

Soudělnost v přirozených číslech:

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, \mathrm{nsd}(x, y) > 1\}.$$

Prázdná relace $\emptyset$, univerzální relace $X \times Y$.
Rovnoběžnost v rovině:

$$\{(x, y) : x,\ y \text{ přímky v rovině, } x \parallel y\}$$

.

Reprezentace výčtem hodnot, grafem, šipkovým diagramem, maticí.
Vlastnosti relace R na množině X:

- reflexivní: xRx pro každé $x \in X$.
- symetrická: pro každé $x, y \in X$, $xRy \Leftrightarrow yRx$.

- slabě antisymetrická: pro každé $x, y \in X$, jestliže $xRy \wedge yRx$, pak $x = y$.
- antisymetrická: pro žádné $x, y \in X$ neplatí zároveň xRy a yRx.
- tranzitivní: pro každé $x, y, z \in X$, jestliže xRy a yRz, pak xRz.

Definice 2. *Relace na R množině X je*

- *ekvivalence, jestliže R je reflexivní, symetrická a tranzitivní,*
- *částečné uspořádání, jestliže R je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,*
- *ostré částečné uspořádání, jestliže R je antisymetrická a tranzitivní.*

Operace na relacích:

- Inverze: pro relaci R mezi X a Y je $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$ relace mezi Y a X; $xR^{-1}y$ právě když yRx.
- Skládání: pro relaci R_1 mezi X a Z a relaci R_2 mezi Z a Y je $R_1 \circ R_2 = \{(x, y) : (\exists z)\,(x, z) \in R_1 \wedge (z, y) \in R_2\}$ relace mezi X a Y.

Příklad 2.
Relace R je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.
V obecnosti $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.
$R \circ R^{-1}$ je symetrická.

1 Ekvivalence

Nechť R je ekvivalence na množině X. Třída ekvivalence prvku $a \in X$ je $[a]_R = \{x : x \in X, aRx\}$.

Věta 1. *Nechť R je ekvivalence na množině X.*

(a) Pro každé $a \in X$ platí $a \in [a]_R$.

(b) Jestliže $a, b \in X$ a aRb, pak $[a]_R = [b]_R$.

(c) Jestliže $a, b \in X$ a $\neg aRb$, pak $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Důkaz. (a) platí díky reflexivitě.

Nechť platí aRb. Jestliže $c \in [b]_R$, pak bRc, což z tranzitivity implikuje aRc, a tedy $c \in [a]_R$. Proto máme $[b]_R \subseteq [a]_R$. Ze symetrie platí bRa a stejný argument implikuje $[a]_R \subseteq [b]_R$. Tedy $[a]_R = [b]_R$, a (b) platí.

Pro (c) ukážeme ekvivalentní obměnu: Jestliže $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, pak aRb. Skutečně, když $c \in [a]_R \cap [b]_R$, pak aRc a bRc a ze symetrie a tranzitivity dostáváme aRb. □

Rozklad na třídy ekvivalence $\mathcal{P}(R) = \{[x]_R : x \in X\}$.

Příklad 3. *Nechť $\sim$ je relace na $\mathbb{N}$ tž. $x \sim y$ právě když $3|x - y$. Pak $[3]_\sim = [6]_\sim = [9]_\sim = \dots$ jsou čísla dělitelná 3, $[1]_\sim = [4]_\sim = \dots$ jsou čísla dávající zbytek 1 po dělení 3, a $[2]_\sim = [5]_\sim = \dots$ jsou čísla dávající zbytek 2 po dělení 3. Každé číslo dává zbytek 0, 1, nebo 2 po dělení 3, a tedy $\mathcal{P}(\sim) = \{[1]_\sim, [2]_\sim, [3]_\sim\}$.*

Nechť P je relace na atomech, xPy právě když x a y mají stejně protonů. Třídy ekvivalence: chemické prvky.

Třídy ekvivalence jednoznačně určují ekvivalenci. Nechť $\mathcal{Q}$ je rozklad množiny X (tj. prvky $\mathcal{Q}$ jsou neprázdné navzájem disjunktní podmnožiny X a $X = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$. Definujme relaci $\sim_\mathcal{Q}$ na X tž. $x \sim_\mathcal{Q} y$ právě když existuje $Q \in \mathcal{Q}$ tž. $x, y \in Q$.

Lemma 2. *Pro každý rozklad $\mathcal{Q}$ množiny X je $\sim_\mathcal{Q}$ ekvivalence a třídy této ekvivalence jsou právě prvky $\mathcal{Q}$. Naopak, je-li R ekvivalence na X, pak $R =\sim_{\mathcal{P}(R)}$.*

Důkaz. Reflexivita a symetrie $\sim_\mathcal{Q}$ je zřejmá. Jestliže $x \sim_\mathcal{Q} y$ a $y \sim_\mathcal{Q} z$, pak $x, y \in Q_1$ a $y, z \in Q_2$ pro nějaké $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$. Jelikož prvky $\mathcal{Q}$ jsou navzájem disjunktní a $y \in Q_1 \cap Q_2$, máme $Q_1 = Q_2$. Proto $x, z \in Q_1$ a $x \sim_\mathcal{Q} z$. Proto $\sim_\mathcal{Q}$ je i tranzitivní, a tedy $\sim_\mathcal{Q}$ je ekvivalence. Pro každé $x \in X$ je třída ekvivalence $[x]_{\sim_\mathcal{Q}}$ rovná prvku $Q \in \mathcal{Q}$ tž. $x \in Q$.

Nechť R je ekvivalence na X. Jestliže xRy pak $[x]_R = [y]_R$, a tedy $x, y \in [x]_R$ a $x \sim_{\mathcal{P}(R)} y$. Jestliže $x \sim_{\mathcal{P}(R)} y$, pak $x, y \in Q$ pro nějaké $Q \in \mathcal{P}(R)$, řekněme $Q = [z]_R$. Pak xRz a yRz, a ze symetrie a tranzitivity xRy. Proto $R =\sim_{\mathcal{P}(R)}$. □

2 Částečná uspořádání

Pozorování 3. *Nechť X je množina a $E = \{(x, x) : x \in X\}$ je relace rovnosti na X. Je-li $\preceq$ částečné uspořádání na X, pak $\preceq \setminus E$ je ostré částečné uspořádání na X. Je-li $\prec$ ostré částečné uspořádání na X, pak $\prec \cup E$ je částečné uspořádání na X.*

Reprezentace Hasseho diagramem: šipky vedou nahoru, bez tranzitivních a reflexivních šipek.

Pro částečné uspořádání $\preceq$ na X a $x \in X$ definujme $\downarrow_\preceq x = \{y : y \in X, y \prec x\}$.

Věta 4. *Nechť $\preceq$ je částečné uspořádání na množině X a $x, y \in X$. Pak $x \preceq y$ právě když $\downarrow_\preceq x \subseteq \downarrow_\preceq y$. Navíc, jestliže $x \neq y$, pak $\downarrow_\preceq x \neq \downarrow_\preceq y$.*

Důkaz. Jestliže $x \preceq y$ a $z \in \downarrow_{\preceq} x$, pak $z \preceq x$ a z tranzitivity $z \preceq y$, a tedy $z \in \downarrow_{\preceq} y$; proto $x \subseteq \downarrow_{\preceq} y$.

Z reflexivity máme $x \in \downarrow_{\preceq} x$. Jestliže $\downarrow_{\preceq} x \subseteq \downarrow_{\preceq} y$, pak $x \in \downarrow_{\preceq} y$, a tedy $x \preceq y$.

Jestliže $x \neq y$, pak ze slabé antisymetrie plyne $x \npreceq y$ nebo $y \npreceq z$; BÚNO předpokládejme $x \npreceq y$. Pak $x \notin \downarrow_{\preceq} y$, a proto $\downarrow_{\preceq} x \neq \downarrow_{\preceq} y$. $\square$

Prvky x a y jsou neporovnatelné v částečném uspořádání $\preceq$, jestliže $x \npreceq y$ a $y \npreceq x$. Antiřetězec je množina navzájem neporovnatelných prvků.

Příklad 4. *Relace „x dělí y" je uspořádání na přirozených číslech. Dvě čísla jsou neporovnatelná, jestliže ani jedno z nich nedělí to druhé.*

Částečné uspořádání je lineární, jestliže každé dva prvky jsou porovnatelné. Řetězec je množina navzájem porovnatelných prvků; tedy $\preceq$ na řetězci je lineární uspořádání.

Prvek $x \in X$ je v uspořádání $\preceq$ na X

- nejmenší, jestliže $x \preceq y$ pro každé $y \in X$,
- minimální, jestliže neexistuje prvek $y \in X \setminus \{x\}$ tž. $y \preceq x$.

Obdobně největší a maximální.

Příklad 5. *Má-li částečné uspořádání nejmenší prvek, pak je (ze slabé antisymetrie) jednoznačný a je to také jediný minimální prvek.*

Navzájem různé minimální prvky jsou neporovnatelné.

Uspořádání dělitelností na $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek 1.

Uspořádání dělitelností na $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ nemá nejmenší prvek, minimální prvky jsou prvočísla.

Uspořádání celých čísel dle velikosti nemá žádný minimální prvek.

Lemma 5. *Je-li $\preceq$ částečné uspořádání na neprázdné konečné množině X, pak $\preceq$ má alespoň jeden minimální prvek.*

Důkaz. Indukcí dle $|X|$. Jestliže $X = \{x\}$, pak x je minimální prvek. Můžeme tedy předpokládat $|X| \geq 2$. Nechť x je libovolný prvek X. Uvažujme $\preceq$ na množině $X \setminus \{x\}$. Z indukčního předpokladu má toto částečné uspořádání minimální prvek m. Jestliže $x \npreceq m$, pak m je minimální i na X. Jestliže $x \preceq m$, pak x je minimální prvek na X; jinak by musel existovat prvek $z \in X \setminus \{x\}$ tž. $z \preceq x$, z tranzitivity bychom měli $z \preceq m$ a z minimality m na $X \setminus \{x\}$ by plynulo $z = m$, a tedy $m \preceq x$ ve sporu se slabou antisymetrií. $\square$