Řetězce a antiřetězce v uspořádáních

Zdeněk Dvořák

19. prosince 2018

Nechť $(X, \prec)$ je ostré částečné uspořádání konečné množiny X. Řetězec je podmnožina $R \subseteq X$ navzájem porovnatelných prvků (zúžení $\prec$ na R je tedy lineární uspořádání), antiřetězec je podmnožina $A \subseteq X$ navzájem neporovnatelných prvků. Velikost největšího řetězce v $(X, \prec)$ značíme $\omega(X, \prec)$, velikost největšího antiřetězce $\alpha(X, \prec)$. Řetězec či antiřetězec je maximální, jestliže žádná jeho vlastní nadmnožina není řetězec/antiřetězec.

Věta 1. *Nechť $(X, \prec)$ je ostré částečné uspořádání konečné množiny X. Pak X lze pokrýt $\omega(X, \prec)$ antiřetězci.*

Důkaz. Pro každý prvek $x \in X$ označme jako $\ell(x)$ velikost největšího řetězce v $(X, \prec)$, jehož je x maximální prvek. Povšimněme si, že je-li $x \prec y$, pak $\ell(x) < \ell(y)$ (jelikož y můžeme připojit za nejdelší řetězec končící v x); množina $X_n = \{x \in X : \ell(x) = n\}$ je tedy antiřetězec pro každé přirozené číslo n. Také zjevně $1 \le \ell(x) \le \omega(X, \prec)$, a proto $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{\omega(X,\prec)}$. $\square$

Poznámka: méně než $\omega(X, \prec)$ antiřetězců použít nelze, jelikož každý antiřetězec obsahuje nejvýše jeden vrchol nejdelšího řetězce.

Důsledek 2 (Věta o dlouhém a širokém)**.** *Pro každé ostré částečné uspořádání $(X, \prec)$ konečné množiny X platí*

$$\alpha(X, \prec) \cdot \omega(X, \prec) \ge |X|.$$

Speciálně, $\max(\alpha(X, \prec), \omega(X, \prec)) \ge \sqrt{|X|}$.

Důkaz. Jelikož X je sjednocení $\omega(X, \prec)$ antiřetězců, alespoň jeden z těchto antiřetězců musí mít velikost alespoň $\frac{|X|}{\omega(X,\prec)}$. $\square$

Důsledek 3 (Erdős-Szekeres)**.** *Každá posloupnost n navzájem různých čísel obsahuje rostoucí nebo klesající vybranou podposloupnost délky alespoň $\sqrt{n}$.*

Důkaz. Uvažme takovou posloupnost $a_1, \ldots, a_n$. Nechť $X = \{1, \ldots, n\}$ a $i \prec j$ pro $i, j \in X$ jestliže $i < j$ a $a_i < a_j$. Pak vybraná podposloupnost je rostoucí právě když její indexy tvoří řetězec v $(X, \prec)$ a klesající právě když její indexy tvoří antiřetězec v $(X, \prec)$. $\square$

Tvrzení pro pokrytí řetězci analogické k větě 1 platí, je ale o něco náročnější na důkaz.

Věta 4 (Dilworthova věta)**.** *Nechť $(X, \prec)$ je ostré částečné uspořádání konečné množiny X. Pak X lze pokrýt $\alpha(X, \prec)$ řetězci.*

Důkaz. Indukcí dle $|X|$. Nechť $\alpha = \alpha(X, \prec)$. Jestliže X obsahuje řetězec R takový, že $\alpha(X \setminus R, \prec) < \alpha$, pak $X \setminus R$ lze z indukčního předpokladu pokrýt $\alpha - 1$ řetězci, a spolu s řetězcem R dostáváme pokrytí $(X, \prec)$ pomocí α řetězců. Stačí tedy ukázat, že $(X, \prec)$ takový řetězec obsahuje.

Nechť m je libovolný maximální prvek $(X, \prec)$. Jelikož $\{m\}$ je řetězec, stačí uvažovat případ, že $\alpha(X \setminus \{m\}, \prec) = \alpha$. Z indukčního předpokladu lze $X \setminus \{m\}$ pokrýt řetězci $R_1, \ldots, R_\alpha$. Jelikož $X \setminus \{m\}$ obsahuje antiřetězec velikosti α a každý řetězec protíná antiřetězec v nejvýše jednom prvku, každý z řetězců $R_1, \ldots, R_\alpha$ musí takový antiřetězec protínat v právě jednom prvku. Pro $i = 1, \ldots, \alpha$ jakožto a_i označme největší prvek v R_i, který je obsažený v antiřetězci velikosti α, a položme $A = \{a_1, \ldots, a_\alpha\}$.

Tvrdíme, že A je antiřetězec: Kdyby $a_i \prec a_j$, uvažme antiřetězec A_j velikosti α obsahující a_j. Tento antiřetězec protíná řetězec R_i v právě jednom prvku r_i (kde $r_i \neq a_i$, jelikož a_i a a_j jsou porovnatelné). Jelikož a_i je největší prvek v R_i obsažený v antiřetězci velikosti α, máme $r_i \prec a_i$. Pak z tranzitivity $r_i \prec a_j$, což je spor, jelikož A_j je antiřetězec.

Jelikož $(X, \prec)$ neobsahuje řetězec větší než α, prvek m je porovnatelný s nějakým prvkem antiřetězce A, BÚNO s a_1. Jelikož m je maximální prvek, máme $a_1 \prec m$. Uvažme řetězec R tvořený m, a_1 a všemi prvky řetězce R_1 menšími než a_1. Množina $X \setminus R$ je pokryta řetězci $R_1 \setminus R, R_2, \ldots, R_\alpha$, kdyby platilo $\alpha(X \setminus R, \prec) = \alpha$, pak by tedy nějaký prvek $R_1 \setminus R$ musel být obsažen v antiřetězci velikosti α; to je ovšem ve sporu s definicí a_1. Proto $\alpha(X \setminus R, \prec) < \alpha$, jak jsme chtěli dokázat. $\square$

Graf porovnatelnosti $P(X, \prec)$ je graf s množinou vrcholů X, v němž jsou hranou spojeny právě porovnatelné prvky. Řetězce v $(X, \prec)$ odpovídají klikám v $P(X, \prec)$, antiřetězce odpovídají nezávislým množinám (množinám vrcholů, z nichž žádné dva nejsou spojené hranou). Velikost největší nezávislé množiny v grafu G značíme $\alpha(G)$. Věta o dlouhém a širokém tedy implikuje, že je-li G graf porovnatelnosti nějakého částečného uspořádání, pak $\max(\alpha(G), \omega(G)) \geq \sqrt{|V(G)|}$. Pro obecné grafy toto tvrzení neplatí.

Věta 5. *Pro každé $k \geq 2$ existuje graf G_k s $n = \lfloor 2^{(k-3)/2} \rfloor$ vrcholy takový, že $\alpha(G_k) < k$ a $\omega(G_k) < k$.*

Důkaz. Uvažme náhodný graf G_k na n vrcholech, v němž každé dva vrcholy jsou spojené hranou nezávisle s pravděpodobností $1/2$ (tj. pro každou dvojici zvlášť si hodím spravedlivou mincí a spojím je hranou, padne-li panna).

Pravděpodobnost, že k-prvková podmnožina vrcholů tvoří kliku, je $2^{-\binom{k}{2}}$, střední hodnota počtu klik velikosti k v získaném grafu tedy je

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^{k(k-1)/2}} < \frac{n^k}{2^{k(k-1)/2}} \overset{k}{=} \left(\frac{n}{2^{(k-1)/2}}\right)^k < 1/2,$$

a tedy dle Markovovy nerovnosti s pravděpodobností větší než $1/2$ platí $\omega(G_k) < k$. Obdobně střední hodnota počtu nezávislých množin velikosti k je menší než $1/2$, a tedy s pravděpodobností větší než $1/2$ platí $\alpha(G_k) < k$. S nenulovou pravděpodobností tedy platí obě nerovnosti.

Proto musí existovat nějaký graf G_k na n vrcholech tž. $\alpha(G_k) < k$ a $\omega(G_k) < k$. □

Naopak, platí následující tvrzení (Ramseyova věta).

Věta 6. *Každý graf G má méně než $\binom{\alpha(G)+\omega(G)}{\alpha(G)} \leq 2^{\alpha(G)+\omega(G)}$ vrcholů. Speciálně, $\max(\alpha(G), \omega(G)) > \log_2 |V(G)|$.*

Důkaz. Indukcí dle $|V(G)|$. Jestliže $V(G) = \emptyset$, pak $\alpha(G) = \omega(G) = 0$ a $|V(G)| = 0 < 1 = \binom{0}{0}$, tvrzení tedy platí. Můžeme proto předpokládat, že existuje vrchol $v \in V(G)$. Nechť S je je množina všech sousedů v a $N = V(G) \setminus (\{v\} \cup S)$. Pak $\omega(G[S]) \leq \omega(G) - 1$ a $\alpha(G[N]) \leq \alpha(G) - 1$, z indukčního předpokladu tedy máme

$$\begin{aligned}
|S| &\leq \binom{\alpha(G[S]) + \omega(G[S])}{\alpha(G[S])} - 1 \leq \binom{\alpha(G) + \omega(G) - 1}{\alpha(G)} - 1 \\
|N| &\leq \binom{\alpha(G[N]) + \omega(G[N])}{\alpha(G[N])} - 1 \leq \binom{\alpha(G) + \omega(G) - 1}{\alpha(G) - 1} - 1.
\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}
|V(G)| = |S| + |N| + 1 &\leq \binom{\alpha(G) + \omega(G) - 1}{\alpha(G)} + \binom{\alpha(G) + \omega(G) - 1}{\alpha(G) - 1} - 1 \\
&= \binom{\alpha(G) + \omega(G)}{\alpha(G)} - 1.
\end{aligned}$$

□