Barevnost grafů

Zdeněk Dvořák

12. prosince 2018

Definice 1. *Funkce* $\varphi : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ *je* *dobré k-obarvení, jestliže* $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ *pro každou hranu* $uv \in E(G)$. *Barevnost* $\chi(G)$ *grafu* G *je minimální* k *tž.* G *má dobré* k*-obarvení.*

Příklad 1. *Pokud dva blízké vysílače vysílají na stejné frekvenci, docházi k interferenci. Kolik nejméně potřebujeme různých frekvencí, aby se žádné dva blízké vysílače nerušily?*

Nechť G *je graf, jehož vrcholy jsou vysílače a každé dva blízké jsou spojené hranou. Pak potřebujeme alespoň* $\chi(G)$ *frekvencí.*

Pozorování 1. *Jestlíže* $H \subseteq G$, *pak* $\chi(H) \leq \chi(G)$. *Barevnost* K_n *je* n, *barevnost* C_n *je* 2 *je-li* n *sudé a* 3 *je-li* n *liché. Graf má barevnost* 1 *právě když nemá žádné hrany.*

Klikovost $\omega(G)$ je rovná velikosti největší kliky (úplného podgrafu) v G.

Pozorování 2. $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Poznámka: Ale barevnost může být i větší (existují grafy bez trojúhelníků s libovolně velkou barevností).

Graf G je d-degenerovaný, jestliže každý jeho podgraf obsahuje vrchol stupně nejvýše d.

Příklad 2. *Stromy jsou* 1*-degenerované, rovinné grafy jsou* 5*-degenerované.*

Lemma 3. *Je-li graf* G d*-degenerovaný, pak má barevnost nejvýše* $d + 1$.

Důkaz. Indukcí dle počtu vrcholů, pro grafy s nejvýše $d+1$ vrcholy je tvrzení triviální. Jestliže $|V(G)| > d + 1$, nechť v je vrchol G stupně nejvýše d. Z indukčního předpokladu lze $G-v$ obarvit $d+1$ barvami. Na okolí v je použito nejvýše $\deg(v) \leq d$ barev, alespoň jedna z $d + 1$ je tedy nepoužitá a můžeme jí obarvit v, čímž dostáváme dobré obarvení G pomocí $d + 1$ barev. $\square$

Důsledek 4. *Stromy mají barevnost nejvýše* 2*, rovinné grafy nejvýše* 6*. Graf maximálního stupně* Δ *má barevnost nejvýše* $\Delta + 1$.

Věta 5. *Graf* G *má barevnost nejvýše* 2 *právě když* G *neobsahuje lichý cyklus.*

Důkaz. Ukážeme obměnu: G má barevnost alespoň 3 právě když G obsahuje lichý cyklus.

BÚNO G je souvislý. Nechť T je kostra G a φ je dobré 2-obarvení T. Jestliže φ není dobré 2-obarvení G, pak $E(G) \setminus E(T)$ obsahuje hranu $e = uv$, kde $\varphi(u) = \varphi(v)$. Na cestě P v T mezi u a v se střídají barvy 1 a 2, tato cesta má tedy sudou délku. Pak $P + e$ je lichý cyklus v G.

Naopak, je-li C lichý cyklus v G, pak $\chi(G) \geq \chi(C) = 3$. □

Grafům barevnosti 2 se říká bipartitní – jejich vrcholy jdou rozdělit na dvě části tak, že hrany vedou pouze mezi částmi.

Jednoduchá charakterizace grafů barevnosti k pro $k \geq 3$ neexistuje, rozhodnout, zda je graf 3-obarvitelný je těžké; dokonce i pro rovinné grafy. Ale platí:

Věta 6 (Věta o čtyřech barvách)**.** *Každý rovinný graf je* 4*-obarvitelný.*

Obtížný důkaz s použitím výpočetní techniky, dlouho otevřený problém (barvení mapy čtyřmi barvami tak, aby žádné dva státy se společnou hranicí neměly stejnou barvu). Dokážeme si snažší tvrzení o 5-barevnosti rovinných grafů.

Kontrakce hrany $e = uv$ v grafu znamená smazání hrany e a nahrazení u a v novým vrholem a přesměrování všech hran incidentních s u nebo v do tohoto nového vrcholu. Graf vzniklý kontrakcí hrany e v G značíme G/e.

Pozorování 7. *Je-li* G *rovinný, pak* G/e *je také rovinný.*

Věta 8. *Každý rovinný graf* G *lze obarvit* 5 *barvami.*

Důkaz. Indukcí dle počtu vrcholů, pro grafy s nejvýše 5 vrcholy tvrzení platí. Rovinné grafy mají průměrný stupeň menší než 6, v G tedy existuje vrchol v stupně nejvýše 5. Jestliže $\deg(v) \leq 4$, obarvíme $G - v$ z indukčního předpokladu a v dobarvíme barvou, která není použita na jeho sousedech. Můžeme tedy předpokládat $\deg(v) = 5$. Pak v má dva sousedy x a y, kteří nejsou spojeni hranou (jinak by G obsahoval K_6 jako podgraf a tedy by nebyl rovinný). Nechť G' vznikne z G kontrakcí gran vx a vy a zahozením vzniklých násobných hran (smyčky nevzniknou, jelikož $xy \notin E(G)$). Pak G' je rovinný a z indukčního předpokadu je tedy 5-obarvitelný. Proto $G - v$ má 5-obarvení takové, že x a y mají stejnou barvu. Na okolí v jsou pak použity nejvýše 4 barvy, vrchol v tedy lze dobarvit nepoužitou barvou. □