Rovinné grafy

Zdeněk Dvořák

5. prosince 2018

Bude se nám hodit pracovat s multigrafy, tj. grafy, kde mezi dvěma vrcholy může vést i více hran. Povolujeme také smyčky, hrany spojující vrchol sám se sebou. Formálně multigraf je trojice (V, E, k), kde V a E jsou konečné disjunktní množiny a $r : E \to 2^V$ přiřazuje každé hraně množinu jejích konců velikosti 1 nebo 2.

Rovinné nakreslení multigrafu (neformálně): vrcholy $\mapsto$ navzájem různé body v rovině, hrany $\mapsto$ spojité křivky, které je propojují bez křížení.

Nechť $\theta : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}^2$ je prostá spojitá funkce. Pak $\theta(\langle 0, 1\rangle)$ je jednoduchá křivka (v rovině) a $\theta(0)$ a $\theta(1)$ jsou její konce. Obdobně, je-li θ spojitá, prostá na intervalu $\langle 0, 1)$ a $\theta(0) = \theta(1)$, pak $\theta(\langle 0, 1\rangle)$ je jednoduchá uzavřená křivka.

Nechť S je podmnožina roviny. Pro body $x, y \in S$ nadefinujme $x \sim y$, jestliže $x = y$ nebo existuje jednoduchá křivka s konci x a y obsažená v S. Pak $\sim$ je ekvivalence, a její bloky jsou komponenty obloukové souvislosti.

Věta 1 (Jordan)**.** *Je-li c jednoduchá uzavřená křivka v rovině, pak $\mathbb{R}^2 \setminus c$ má právě dvě komponenty obloukové souvislosti, omezenou a neomezenou, a c tvoří jejich (společnou) hranici.*

Věta 2. *Nechť Z je konečné sjednocení jednoduchých křivek protínajících se jen v koncových bodech a K je komponenta obloukové souvislosti $\mathbb{R}^2 \setminus Z$. Je-li K omezená, pak Z obsahuje jednoduchou uzavřenou křivku c tž. K je podmnožinou omezené komponenty obloukové souvislosti $\mathbb{R}^2 \setminus c$.*

Definice 1. *Rovinné nakreslení multigrafu $G = (V, E, k)$ je prosté zobrazení $\nu : V \to \mathbb{R}^2$ a systém $\{c_e : e \in E\}$ tž.*

- *pro hranu $e \in E$ s $k(e) = \{u, v\}$ je c_e jednoduchá křivka s konci $\nu(u)$ a $\nu(v)$,*
- *pro smyčku $e \in E$ s $k(e) = \{v\}$ je c_e jednoduchá uzavřená křivka obsahující $\nu(v)$,*

- *$\nu(V(G)) \cap c_e = \nu(k(e))$ pro každou hranu $e \in E$ a*
- *pro různé hrany $e, e' \in E$ platí $c_e \cap c_{e'} = \nu(k(e) \cap k(e'))$.*

Stěny nakreslení jsou komponenty obloukové souvislosti

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Big(\nu(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} c_e\Big).$$

Právě jedna ze stěn je neomezená, říkáme jí vnější stěna.

Multigraf je rovinný, jestliže má rovinné nakreslení. Pozor: rovinný multigraf může mít více různých nakreslení (i když považujeme za stejná nakreslení, která se liší pouze "deformací"). Stěny jsou vlastností nakreslení, ne multigrafu!

Příklad 1. *Kružnice a stromy jsou rovinné.*

Lemma 3. *Nechť G je souvislý multigraf nakreslený do roviny a nechť c je jednoduchá křivka reprezentující hranu $e \in E(G)$. Jestliže $G - e$ je souvislý, pak c leží v hranicích dvou různých stěn. Odpovídající nakreslení $G - e$ má tedy právě o jednu stěnu méně, než nakreslení G.*

Důkaz. Jelikož $G - e$ je souvislý, e leží na kružnici $K \subseteq G$. Nakreslení K v G odpovídá jednoduché uzavřené křivce c_K, dle Jordanovy věty má $\mathbb{R}^2 \setminus c_K$ dvě komponenty obloukové souvislosti a c_K tvoří jejich společnou hranici. Křivka $c \subset c_K$ je tedy obsažena v hranicích obou komponent. Jelikož stěny nakreslení G jsou podmnožiny těchto komponent, dostáváme, že c je obsažena v hranicích dvou různých stěn. Sjednocení těchto stěn a vnitřku c tvoří stěnu multigrafu $G - e$, ostatní stěny G odpovídají právě ostatním stěnám G. □

Lemma 4. *Nechť G je multigraf nakreslený do roviny a f je jeho stěna. Jestliže G má více než jednu stěnu, pak hranice f obsahuje nakreslení kružnice z G.*

Důkaz. Nechť W je podgraf G nakreslený v hranici f. Pak f je i stěnou W, a jelikož G má více než jednu stěnu, i W má nějakou jinou stěnu f'. Alespoň jedna ze stěn f a f' je omezená, dle Věty 2 tedy nakreslení W obsahuje jednoduchou uzavřenou křivku, a W tedy obsahuje kružnici. □

Důsledek 5. *Libovolné rovinné nakreslení stromu má právě jednu stěnu.*

Důsledek 6 (Eulerova formule)**.** *Každé rovinné nakreslení souvislého multigrafu G má právě*

$$|E(G)| - |V(G)| + 2$$

stěn.

Důkaz. Indukcí dle počtu hran G. Uvažme libovolné nakreslení G. Je-li G minimálně souvislý (strom), pak má $|V(G)|-1$ hran a 1 stěnu, tedy tvrzení platí. Jinak existuje hrana $e \in E(G)$ tž. $G-e$ je souvislý. Z indukčního předpokladu má odpovídající nakreslení $G-e$ právě $|E(G-e)|-|V(G-e)|+2 = |E(G)|-|V(G)|+1$ stěn, a dle Lemma 3 má G o jednu stěnu víc. □

Obecněji, má-li multigraf G c komponent, pak jeho nakreslení má $|E(G)|-|V(G)|+c+1$ stěn.

Hranice každé stěny nakreslení multigrafu G odpovídá sjednocení uzavřených tahů v G (právě jednoho tahu, je-li G souvislý). Občas se takovému tahu ohraničujícímu stěnu také říká stěna. Součet délek těchto tahů je <u>délka</u> stěny.

Multigrafy také můžeme kreslit na sféru (povrch koule). To je ekvivalentní: položme si kouli na rovinu a na severní pól (který BÚNO neleží v nakreslení) dejme žárovku. "Stín" multigrafu nakresleného na sféře dává rovinné nakreslení, a naopak.

Důsledek 7. *Nechť f je stěna nakreslení multigrafu G ohraničená tahem W. Pak existuje nakreslení G' multigrafu G ve kterém jsou stěny ohraničené stejnými tahy jako v nakreslení G a vnější stěna nakreslení G' je ohraničená tahem W.*

Důkaz. Promítneme nakreslení G na sféru, tu pootočíme tak, aby severní pól ležel uvnitř stěny odpovídající f, a promítneme zpět do roviny. □

Příklad 2 (Platónská tělesa)**.** *<u>Platónské těleso</u> je pravidelný konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^3$, tj. takový, že každá jeho stěna, hrana či vrchol se dají převést na libovolnou jinou nějakou symetrií tělesa. Uvažujme libovolné platónské těleso P, opišme si kolem něj sféru, a promítněme jeho síť (sjednocení úseček tvořících jeho hrany) na tuto sféru. Tím dostáváme nakreslení souvislého rovinného grafu G_P na sféru, kde každý vrchol má stejný stupeň $d \geq 3$ a každá stěna má stejnou délku $\ell \geq 3$. Nechť n, m, a s je počet vrcholů, hran a stěn G_P. Víme, že součet stupňů vrcholů je dvojnásobek počtu hran, tj. $dn = 2m$. Stejný argument provedený pro stěny dává $\ell s = 2m$. Z Eulerovy formule máme $m+2 = n+s$. Dosazením $n = 2m/d$ a $s = 2m/\ell$ dostáváme*

$$\frac{2m}{d} + \frac{2m}{\ell} = m+2$$
$$\frac{2}{d} + \frac{2}{\ell} = 1 + \frac{2}{m} > 1$$

To je možné pouze když $d = 3$ a $\ell \leq 5$, nebo $d \in \{4,5\}$ a $\ell = 3$. Máme tedy následující možnosti (m, n a s je dopočítáno dle výše uvedených vzorců):

d	ℓ	s	n	m	*těleso*
3	*3*	*4*	*4*	*4*	*čtyřstěn*
3	*4*	*6*	*8*	*12*	*krychle*
3	*5*	*12*	*20*	*30*	*dvanáctistěn*
4	*3*	*8*	*6*	*12*	*osmistěn*
5	*3*	*20*	*12*	*30*	*dvacetistěn*

Žádná jiná platónská tělesa neexistují.

Uvažme nakreslení multigrafu G do roviny. Nakresleme do každé stěny vrchol a pro každou hranu $e \in E(G)$ spojme vrcholy v incidentních stěnách hranou protínající e. Tím dostáváme duální nakreslení multigrafu $G^\star$. Poznámka: I když je G jednoduchý graf, $G^\star$ může mít smyčky či násobné hrany (např. duál ke stromu T je multigraf s $|E(T)|$ smyčkami).

Pozorování 8. *Nechť nakreslení G má s stěn. Pak nakreslení $G^\star$ má s vrcholů a $|E(G)|$ hran, a jestliže G je souvislý, pak $G^\star$ má $|V(G)|$ stěn. Multigraf $G^\star$ je vždy souvislý. Jestliže G je souvislý, pak $(G^\star)^\star = G$.*

Příklad 3. *Osmistěn je duál krychle. Dvacetistěn je duál dvanáctistěnu. Čtyřstěn je svůj vlastní duál.*

Lemma 9. *Nechť G je jednoduchý souvislý graf a G není strom. Je-li G rovinný, pak*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Jestliže G navíc neobsahuje trojúhelník (cyklus délky 3), pak

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

Důkaz. Nechť s je počet stěn libovolného nakreslení G a nechť ℓ je délka nejkratší stěny v tomto nakreslení; součet délek stěn je $2|E(G)|$, a proto $\ell s \leq 2|E(G)|$. Z Eulerovy formule

$$|E(G)| + 2 = |V(G)| + s \leq |V(G)| + \frac{2|E(G)|}{\ell},$$

a tedy

$$|E(G)| \leq \frac{|V(G)| - 2}{1 - 2/\ell}.$$

Jelikož G není strom, dle Lemma 3 má alespoň dvě stěny, a dle Lemma 4 hranice každé z jeho stěn obsahuje kružnici. Proto $\ell \geq 3$, a když G neobsahuje trojúhelník, tak $\ell \geq 4$; to nám dává požadované nerovnosti. $\square$

Důsledek 10. *Jednoduchý rovinný graf má průměrný stupeň menší než* 6. *Jednoduchý rovinný graf bez trojúhelníků má průměrný stupeň menší než* 4.

Příklad 4. *Grafy* K_5 *a* $K_{3,3}$ *nejsou rovinné.*

Podrozdělení grafu vznikne nahrazením některých jeho hran cestami se stejnými konci. Zjevně graf je rovinný, právě když libovolné jeho podrozdělení je rovinné. Říkáme, že G obsahuje podrozdělení H, jestliže nějaký podgraf G je roven podrozdělení H.

Pozorování 11. *Jestliže* G *obsahuje podrozdělení nerovinného grafu, pak* G *není rovinný.*

Věta 12 (Kuratovský)**.** *Graf* G *je rovinný, právě když neobsahuje podrozdělení* K_5 *ani* $K_{3,3}$.