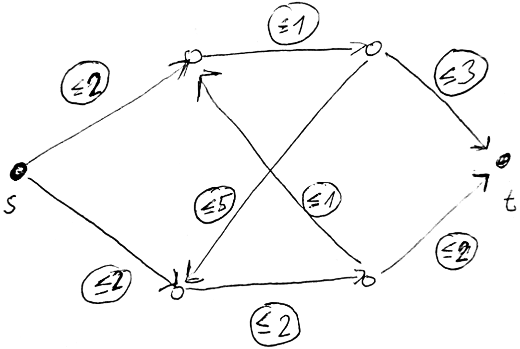
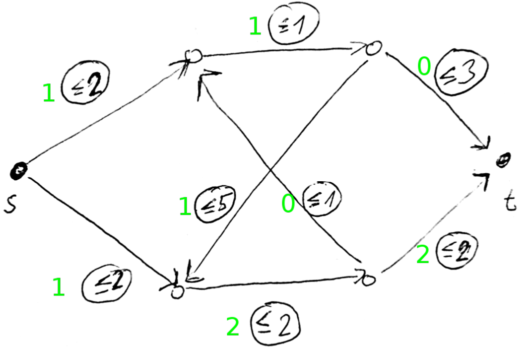
Síť = orientovaný graf s kapacitami $c(e)$ hran a dvěma spec. vrcholy s (zdroj) a t (stok).



Tok = přiřazení nezáporných hodnot $f(e)$ hranám tž.

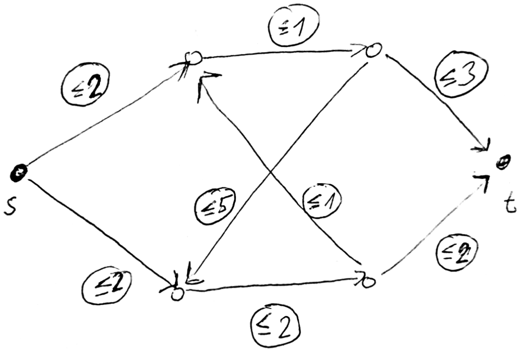
- $f(e) \leq c(e)$ a
- pro $v \neq s, t$,

$$\sum_{e \text{ do } v} f(e) = \sum_{e \text{ z } v} f(e)$$

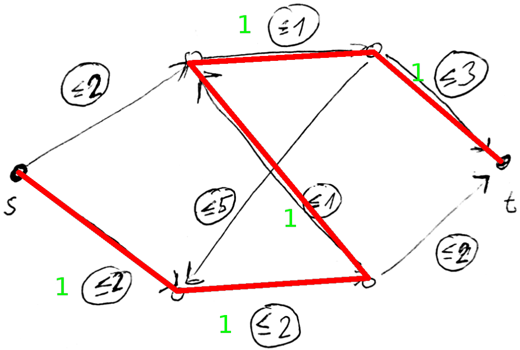


Velikost toku = $\sum_{e \text{ z } s} f(e) - \sum_{e \text{ do } s} f(e)$.

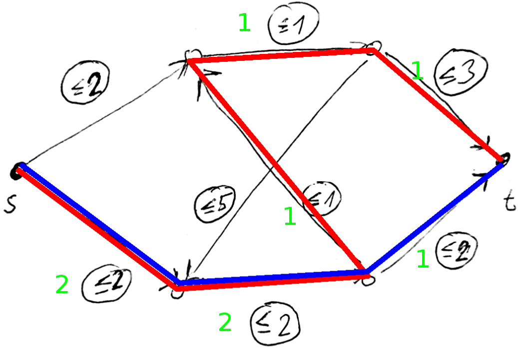
Ford-Fulkerson



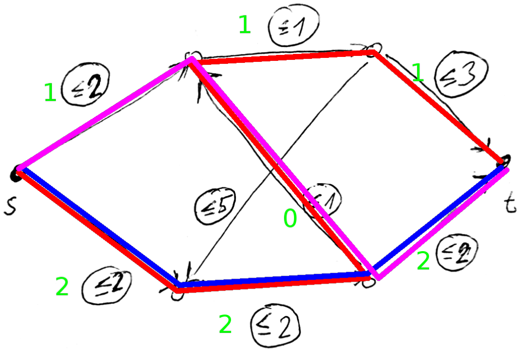
Ford-Fulkerson



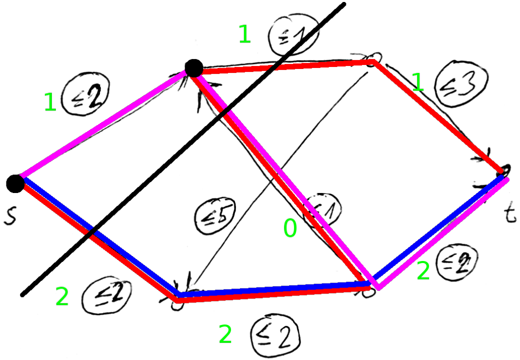
Ford-Fulkerson



Ford-Fulkerson



Ford-Fulkerson



Ford-Fulkerson

while ($\exists$ zlepšující cesta P)

- Zvyš tok podél P o kolik to jde.

Pro celočíselné kapacity:

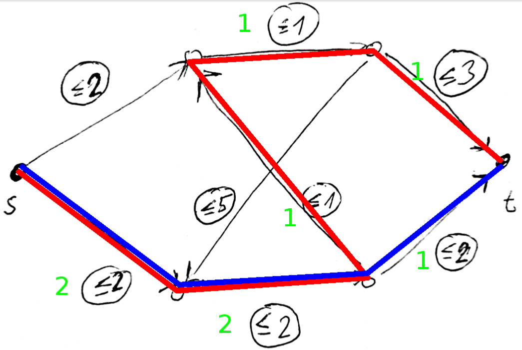
- výsledný tok je celočíselný
- $O(\text{tok} \cdot m)$.

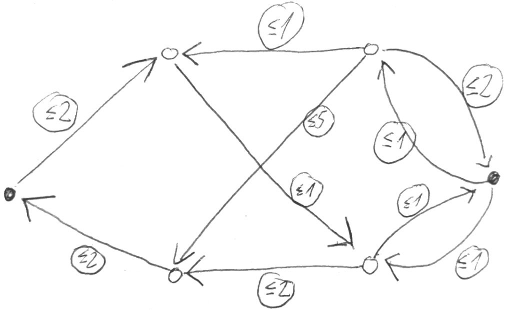
Věta

Max tok = min řez.

Věta

Jsou-li kapacity celočíselné, existuje celočíselný max. tok.


1 ≤1
≤2
1 ≤3
s
≤5
≤1
1
t
1 ≤2
2 ≤2
2 ≤2


≤1
≤2
≤2
≤5
≤1
≤1
≤1
≤1
≤2
≤2

Věta

Nechť f_0 je tok v G a nechť R je odpovídající reziduální síť. Pak

$$f \text{ je tok v } R \Rightarrow f_0 + f \text{ je tok v } G$$
$$g \text{ je tok v } G \Rightarrow g - f_0 \text{ je tok v } R$$

Meta-algoritmus:

```
max_tok (G)
  {
    if (!existuje cesta ze s do t)
      return prázdný tok;
    f_0 = kladný tok v G;
    R = reziduální sít' (G, f_0);
    f = max_tok (R);
    return f_0 + f;
  }
```

Pozorování

Nechť $d(s,t) = d_0$ a f nasytí na každé $s \to t$ cestě délky d_0 alespoň jednu hranu. Pak v reziduální síti f je vzdálenost mezi s a t větší než d_0.

Meta-algoritmus:

```
max_tok (G)
  {
    if (!existuje cesta ze s do t)
      return prázdný tok;
    f_0 = tok nasycující nejkratší s -> t cesty;
    R = reziduální sít' (G, f_0);
    f = max_tok (R);
    return f_0 + f;
  }
```

Rekurze do hloubky $O(n)$.

Dinitzův algoritmus

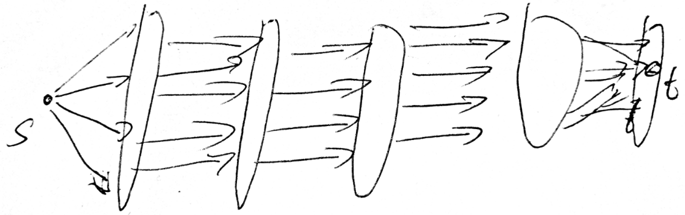
- BFS, nechat jen dopředné hrany do vzdálenosti d_0.
- opakovat `cesta(s, ∞)`, dokud vrací kladné číslo:

```
cesta (v, tok)
{
  if (v == t) return tok;
  for (e = v -> w)
    if ((k=cesta(w, min(tok, kap[e]-tok[e])))>0)
      { tok[e] += k; return k; }
    else remove (e);
  return 0;
}
```

- čas $O(n) + O(\text{smazaných})$
- alespoň jedna nasycená hrana $\Rightarrow$ nasycený tok za $O(nm)$.
- $O(n)$ rekurze $\Rightarrow$ celkový čas $O(n^2m)$.

Dinitzův algoritmus – jednotkové kapacity

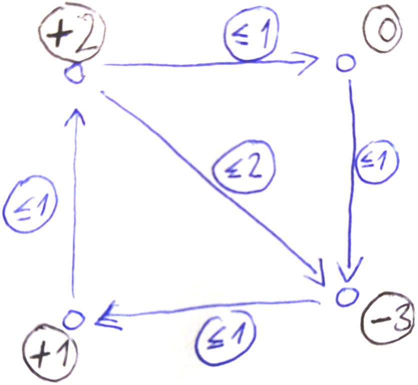
- Čas $O(\text{nasycených} + \text{smazaných})$ na jedno volání `cesta`.
    - Nasycený tok za $O(m)$.
- $d(s,t) > \sqrt{m} \Rightarrow$ vrstva s $O(\sqrt{m})$ hranami
- $d(s,t) > n^{2/3} \Rightarrow$ dvě následující vrstvy s $O(n^{1/3})$ vrcholy $\Rightarrow O(n^{2/3})$ hran.
    - celkový čas $O(\min(m^{1/2}, n^{2/3}) \cdot m)$.



Cirkulace – víc zdrojů a stoků

Pro každý vrchol v:

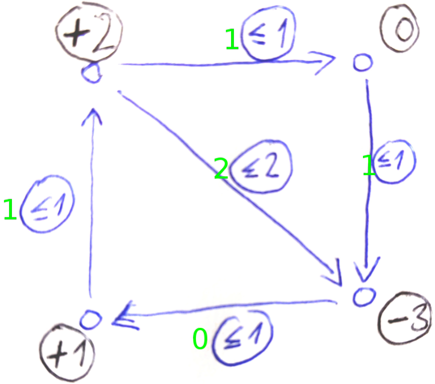
$$\sum_{e \text{ z } v} f(e) - \sum_{e \text{ do } v} f(e) = d(v)$$



Cirkulace – víc zdrojů a stoků

Pro každý vrchol v:

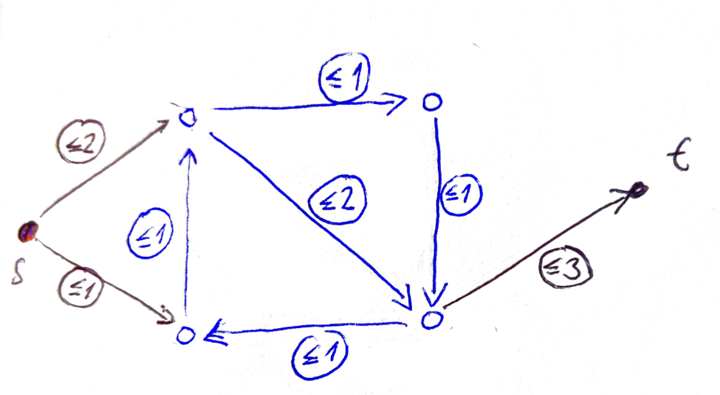
$$\sum_{e \text{ z } v} f(e) - \sum_{e \text{ do } v} f(e) = d(v)$$



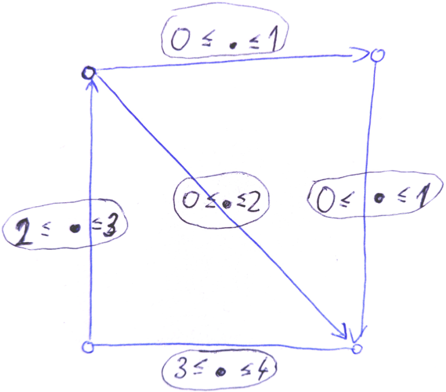
Cirkulace – víc zdrojů a stoků

Pro každý vrchol v:

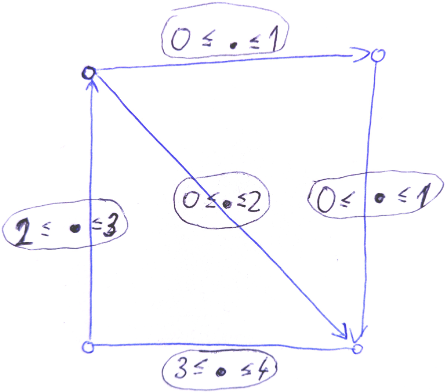
$$\sum_{e \text{ z } v} f(e) - \sum_{e \text{ do } v} f(e) = d(v)$$

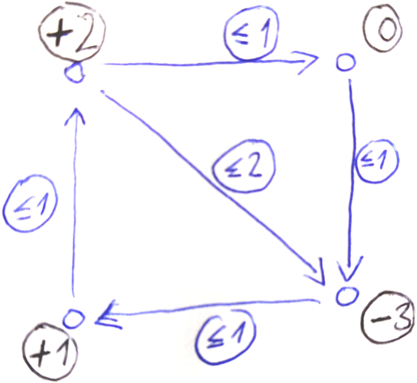


Minimální toky na hranách



Minimální toky na hranách





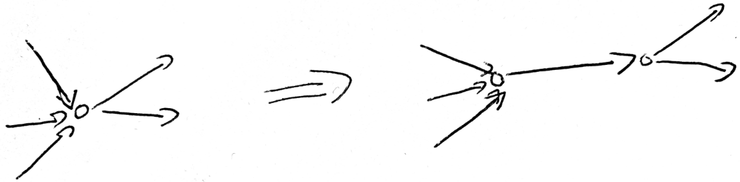
Disjunktní cesty

k hranově disjunktních cest ze s do t:

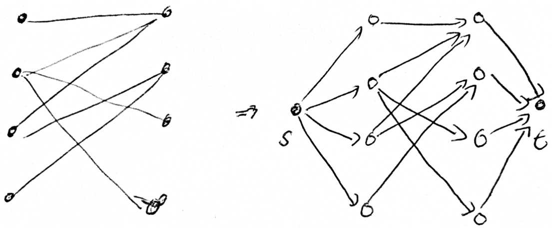
- Najít tok velikosti k (Ford-Fulkerson v $O(km)$).
- Rozložit podgraf z tokových hran na $s \to t$ cesty a cykly:
  - Procházím ze s do hloubky.
  - Zpětná hrana: smažu z grafu a zásobníku cyklus.
  - Dorazím-li do t: vypíšu cestu (zásobník) a smažu ji z grafu.

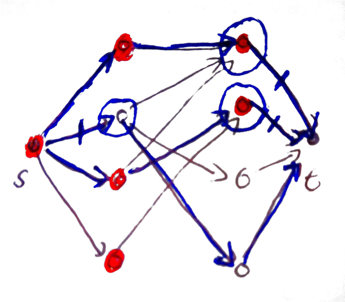
Variace:

- Neorientovaný graf:
  - hrany nahradím dvěma opačně orientovanými
  - z toku vyhodím 2-cykly
- vrcholově disjunktní cesty
  - vrcholy rozdělit na vstupní a výstupní část spojené hranou



Největší párování v bipartitním grafu

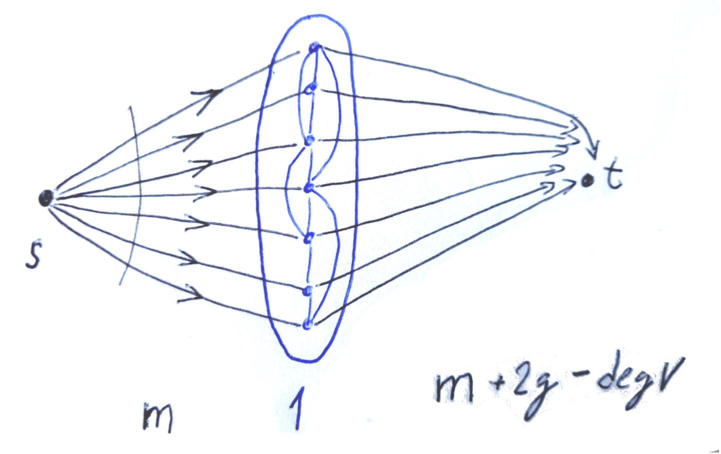




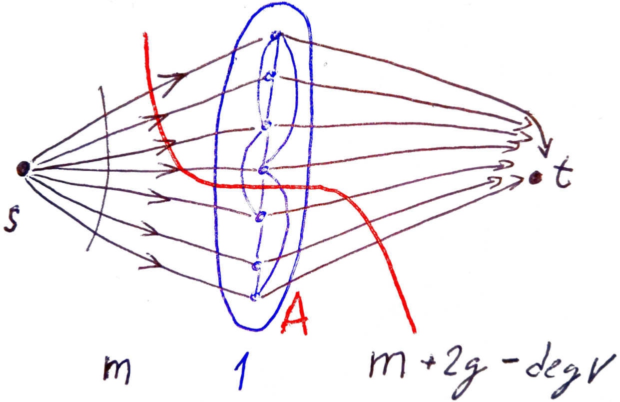
Variace:

- min řez =
- nejmenší vrcholové pokrytí =
- n – největší nezávislá množina

Existuje podgraf hustoty $> g$?



Existuje podgraf hustoty $> g$?



$$\text{cut} = mn + e(A, \overline{A}) - \sum_{v \in A} \deg v + 2g|A|$$

$$= mn + 2g|A| - 2|E(G[A])| = mn + 2|A|(g - |E(G[A])|/|A|)$$

Maximální průměrný stupeň

- půlení intervalů
- pouze $O(mn)$ možných hodnot
  - $\frac{a}{b}$ pro $a \in \{0, \dots, m\}$ a $b \in \{1, \dots, n\}$

Max. zisk s prerekvizitami

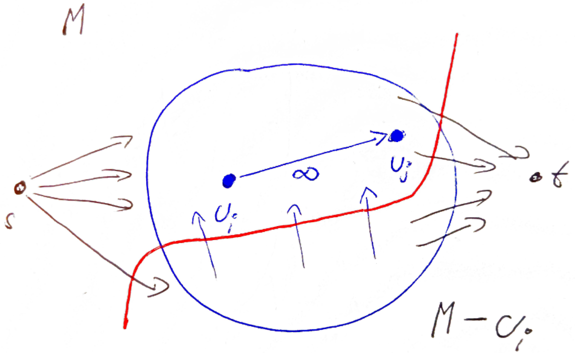
Úlohy $u_1, \ldots, u_n$.

- Prerekvizity $u_i \to u_j$: Nemohu dělat u_i, aniž bych dělal u_j.
- c_i: Zisk ($c_i > 0$) nebo ztráta ($c_i < 0$) za vykonání úlohy.

Max. zisk s prerekvizitami

Úlohy $u_1, \ldots, u_n$.

- Prerekvizity $u_i \to u_j$: Nemohu dělat u_i, aniž bych dělal u_j.
- c_i: Zisk ($c_i > 0$) nebo ztráta ($c_i < 0$) za vykonání úlohy.



$$\text{cut} = nM - \sum_{u_i \text{ taken}} c_i$$