"Convex hull trick"

- Postupně počítáme $a_1, \ldots, a_n$.
- $a_i = g(\min\{f_1(c_i), f_2(c_i), \ldots, f_{i-1}(c_i)\})$, kde
  - f_j je lineární funkce určená hodnotou a_j.

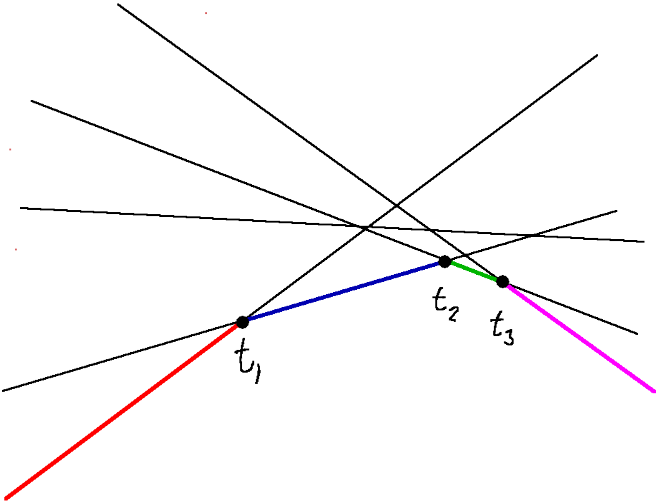
Zadání

Dány navzájem různé výšky $h_0, \ldots, h_n$. Na začátku jsme ve výšce h_0. Pro $i = 1, \ldots, n$ můžeme buď zůstat na aktuální výšce x, nebo za cenu $C + (h_i - x)^2$ přeskočit na výšku h_i. Jak se nejlevněji dostat na výšku h_n?

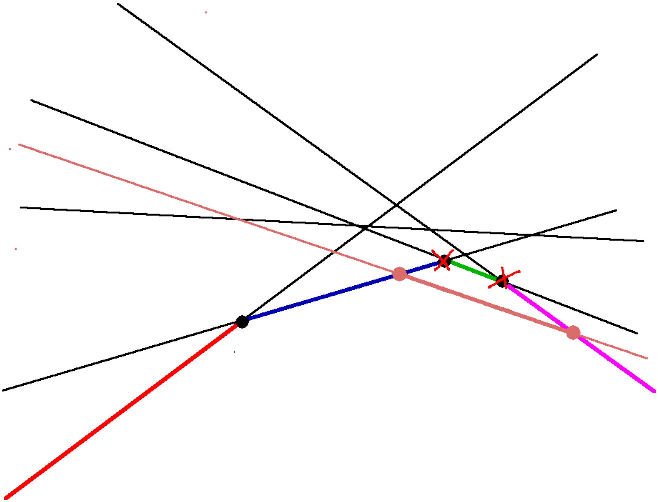
$$a_i = \text{nejmenší cena, jak se dostat do výšky } h_i$$

$$a_i = h_i^2 + \min_{0 \le j < i} (a_j + C + h_j^2 - 2h_j \cdot h_i)$$

$$f_j(x) = a_j + C + h_j^2 - 2h_j \cdot x$$



Hodnota v x: Půlením intervalů v $O(\log n)$.



Přidání další funkce:

- $O(\log n)$ nalezení bodu nad přímkou.
- Amortizovaně v $O(1)$ odebrání smazaných bodů.

"Slope trick"

- Postupně počítáme $a_{i,j}$, rozsah j nemusí být omezený.
- Funce $f_i(x) = a_{i,x}$ je konvexní a po částech lineární.
- Udržujeme jen body zlomu f_i.

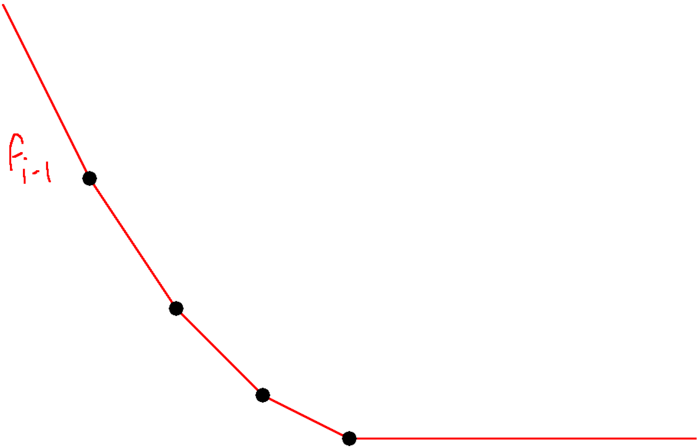
Zadání

Máme posloupnost $p_1, \ldots, p_n$. Za jednotkovou cenu můžeme p_i zvětšit nebo zmenšit o 1. Kolik musíme zaplatit, abychom dostali neklesající posloupnost?

$f_i(x) =$ minimální cena pro

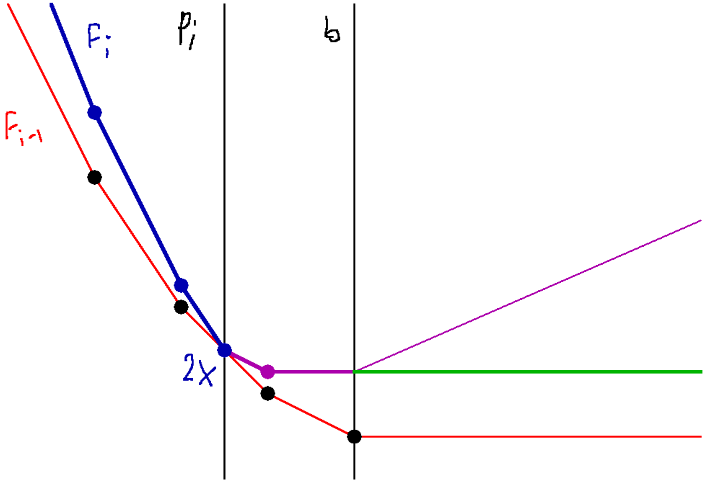
- prefix délky i jehož
- poslední prvek je po úpravách $\leq x$.

Řešení: $f_n(\infty)$.

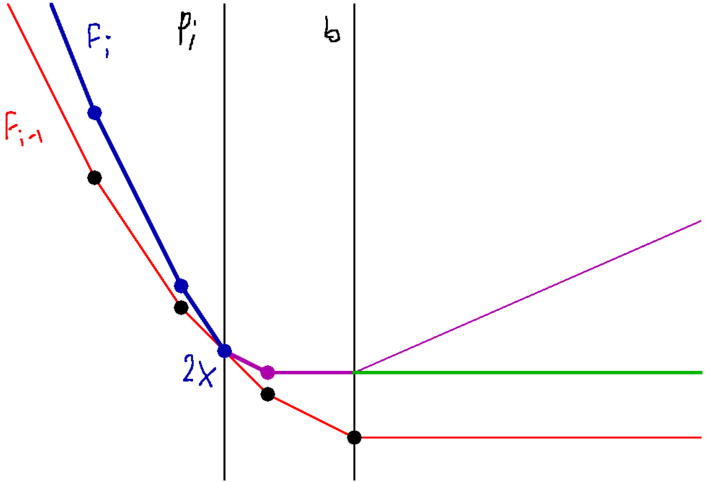


f_{i-1}

$$f_i(x) = \min_{y \le x}(f_{i-1}(y) + |y - p_i|)$$

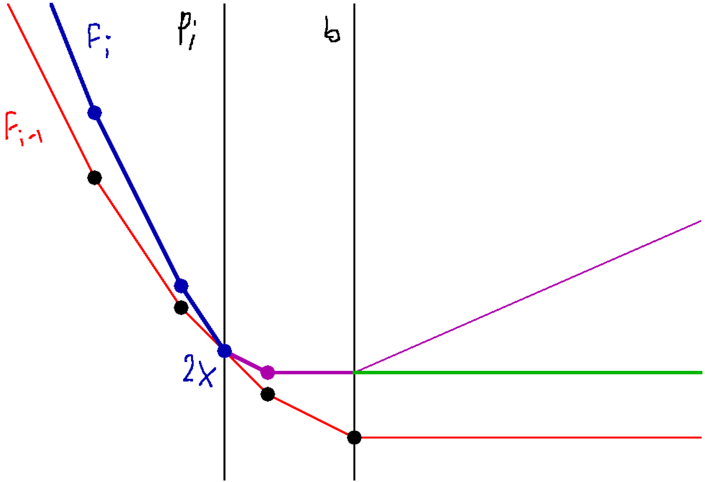


$$f_i(x) = \begin{cases} f_{i-1}(x) + p_i - x & x \le p_i \\ \min_{p_i \le y \le x} f_{i-1}(y) + y - p_i & x \ge p_i \end{cases}$$



$$f_i(x) = \begin{cases} f_{i-1}(x) + p_i - x & x \le p_i \\ f_{i-1}(x) + x - p_i & p_i \le x \le b \\ f_{i-1}(b) + b - p_i & x \ge b \end{cases}$$

$$f_i(\infty) = f_{i-1}(\infty) + b - p_i$$

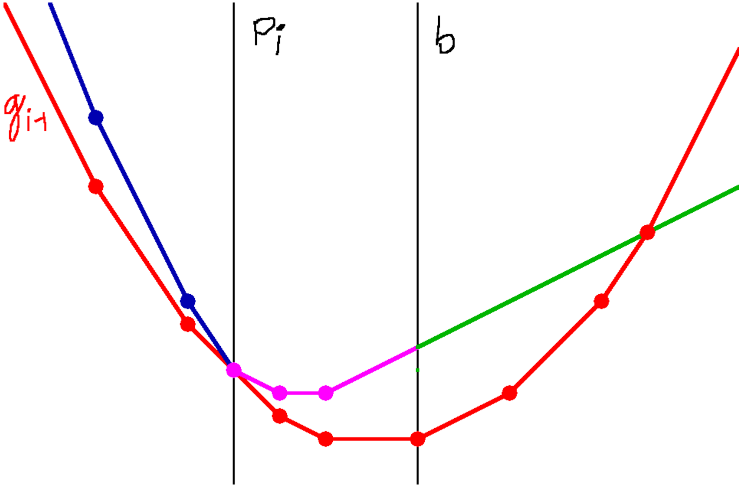


Varianta: $g_i(x) =$ minimální cena pro

- prefix délky i jehož
- poslední prvek je po úpravách roven x.

$$g_i(x) = |x - p_i| + \min_{y \leq x} g_i(y)$$

$$g_i(x) = \begin{cases} g_{i-1}(x) + p_i - x & x \leq p_i \\ g_{i-1}(x) + x - p_i & p_i \leq x \leq b \\ g_{i-1}(b) + x - p_i & x \geq b \end{cases}$$



$$g_i(x) = \begin{cases} g_{i-1}(x) + p_i - x & x \le b \\ g_{i-1}(b) + p_i - x & b \le x \le p_i \\ g_{i-1}(b) + x - p_i & x \ge p_i \end{cases}$$