Burnsideovo lemma

Theorem

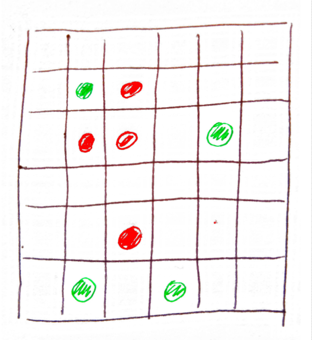
Nechť a je akce grupy G na množině X. Pak počet orbit této akce je

$$\frac{\sum_{\pi \in G} |\{x \in X : a_\pi(x) = x\}|}{|G|}.$$

- “akce grupy na X”: Symetrie udávající, které prvky X považujeme za stejné.
- “počet orbit”: Počet navzájem různých prvků X (různé $=$ nedají se na sebe převést symetriemi popsanými a).

Zadání

Kolika způsoby lze na šachovnici o rozměrech $n \times n$ (n sudé) rozmístit k červených a k zelených kamenů? Na každém poli může být nejvýše jeden kámen a pozice, které se liší pouze rotací či osovou symetrií považujeme za stejné.



Zadání

Kolika způsoby lze na šachovnici o rozměrech $n \times n$ (n sudé) rozmístit k červených a k zelených kamenů? Na každém poli může být nejvýše jeden kámen a pozice, které se liší pouze rotací či osovou symetrií považujeme za stejné.

Identita:

$$\binom{n^2}{k, k}$$

pevných bodů.

$$\binom{n}{a, b} = \begin{cases} \frac{n!}{a!b!(n-a-b)!} & \text{jestliže } a, b \in \mathbb{Z}_0^+ \text{ a } a + b \leq n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

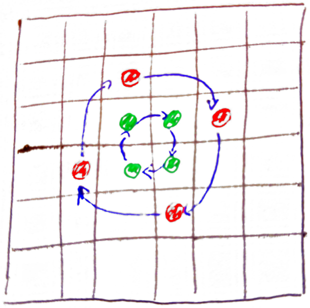
Zadání

Kolika způsoby lze na šachovnici o rozměrech $n \times n$ (n sudé) rozmístit k červených a k zelených kamenů? Na každém poli může být nejvýše jeden kámen a pozice, které se liší pouze rotací či osovou symetrií považujeme za stejné.

Rotace o $\pm 90^\circ$:

$$\binom{n^2/4}{k/4,\, k/4}$$

pevných bodů.



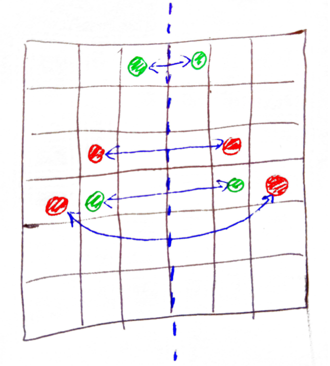
Zadání

Kolika způsoby lze na šachovnici o rozměrech $n \times n$ (n sudé) rozmístit k červených a k zelených kamenů? Na každém poli může být nejvýše jeden kámen a pozice, které se liší pouze rotací či osovou symetrií považujeme za stejné.

Rotace o 180°, zrcadlení kolem vodorovné nebo svislé osy:

$$\binom{n^2/2}{k/2,\, k/2}$$

pevných bodů.



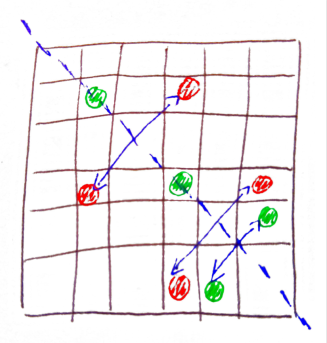
Zadání

Kolika způsoby lze na šachovnici o rozměrech $n \times n$ (n sudé) rozmístit k červených a k zelených kamenů? Na každém poli může být nejvýše jeden kámen a pozice, které se liší pouze rotací či osovou symetrií považujeme za stejné.

Zrcadlení okolo diagonály: Na diagonálu umístíme k_1 červených a k_2 zelených,

$$\sum_{k_1=0}^{k} \sum_{k_2=0}^{k} \binom{n}{k_1, k_2} \binom{(n^2-n)/2}{(k-k_1)/2, (k-k_2)/2}$$

pevných bodů.



Zadání

Kolika způsoby lze na šachovnici o rozměrech $n \times n$ (n sudé) rozmístit k červených a k zelených kamenů? Na každém poli může být nejvýše jeden kámen a pozice, které se liší pouze rotací či osovou symetrií považujeme za stejné.

Celkem:

$$\frac{\binom{n^2}{k,k} + 2\binom{n^2/4}{k/4,k/4} + 3\binom{n^2/2}{k/2,k/2} + 2\sum_{k_1,k_2} \dots}{8}$$

Poznámka:

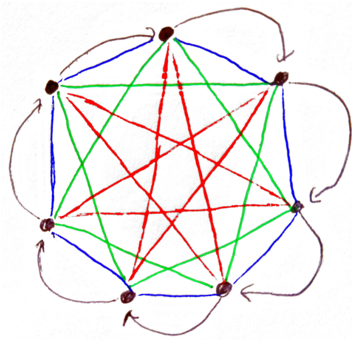
- Typicky chceme výsledek modulo p pro nějaké prvočíslo $p > n^2$.
- Pro výpočet $\binom{n}{a,b}$ potřebujeme určit $a^{-1} \mod p$:
  - $a^{-1} \equiv a^{p-2} \pmod{p}$
  - $1 = \text{nsd}(a, p) = an_1 + pn_2$, $n_1 \equiv a^{-1} \pmod{p}$

```
(n1,n2) = (1, 0); (n3,n4) = (0, 1);
while (a != 1)
  {
    (n3,n4) -= (p / a) * (n1,n2);
    p %= a;
    swap (a, p);
    swap ((n1,n2), (n3,n4));
  }
```

Zadání

Určete počet navzájem neizomorfních grafů na n vrcholech.

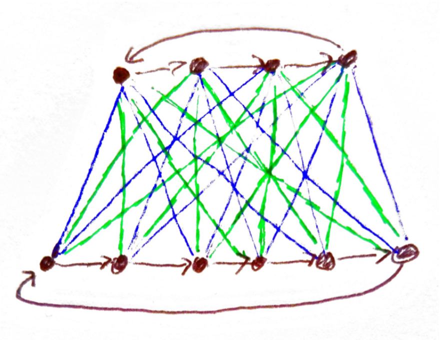
Pro cyklus délky a: $\lfloor a/2 \rfloor$ tříd hrana/nehrana.



Zadání

Určete počet navzájem neizomorfních grafů na n vrcholech.

Pro cykly délek a a b: $\mathrm{nsd}(a, b)$ tříd hrana/nehrana.



Zadání

Určete počet navzájem neizomorfních grafů na n vrcholech.

Pro permutaci s $c_1, \ldots, c_n$ cykly délek $1, \ldots, n$:

$$2^{\sum_{i=1}^{n}\left(c_i\lfloor i/2\rfloor+\binom{c_i}{2}i\right)+\sum_{1\leq i<j\leq n} c_i c_j \mathrm{nsd}(i,j)}$$

pevných bodů.

Počet takových permutací:

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} c_i!\, i^{c_i}}$$

Zadání

Určete počet navzájem neizomorfních grafů na n vrcholech.

Počet neizomorfních grafů:

$$\frac{1}{n!}\sum_{c_1+2c_2+\cdots+nc_n=n}\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}c_i!\,i^{c_i}}2^{\sum_{i=1}^{n}\left(c_i\lfloor i/2\rfloor+\binom{c_i}{2}i\right)+\sum_{1\leq i<j\leq n}c_ic_j\operatorname{nsd}(i,j)}$$