

Zdolávání nerovností



UNIVERZITA JANA EVANGELISTY PURKYNĚ  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA



# Zdolávání nerovností

MICHAL ROLÍNEK A PAVEL ŠALOM

Ústí nad Labem 2011

© Univerzita J. E. Purkyně, 2011  
ISBN 12-345-6789-0

## Jak to všechno vzniklo?

Dostává se vám do rukou text, který vznikl na přelomu let 2009 a 2010. Napsali jsme jej pro Matematický korespondenční seminář PraSe<sup>1</sup> (dále jen MKS), avšak jsme velice rádi, že nezůstal navěky ukryt jen v jeho archivu.

V rámci MKS se každý rok zadává několik sérií úloh, které mohou řešit studenti středních škol z celé České republiky. Každoročně navíc vzniká ještě tzv. seriál, jehož téma si řešitelé MKS sami vyberou a ke kterému se zadává několik seriálových sérií. V době vzniku tohoto textu to byly tři seriálové série, a proto je náš seriál rozdělen na tři díly. Na závěr každého dílu přikládáme i úlohy, které byly studentům v seriálových sériích předloženy, společně s jejich vzorovými řešeními.

Protože text vznikl pro středoškoláky, snažili jsme se tomu přizpůsobit jeho obsah i formu. Úmyslně se vyhýbáme metodám, které by výrazně přesahovaly středoškolské učivo. Pokud jej některé přesto mírně překračují, doufáme, že se nám je podařilo podat přístupně a srozumitelně. Protože však seriál četli i naši známí a kamarádi, čas od času jsme se jej pokusili nečím okořenit. Doufáme, že náš styl nikomu neznepríjemní atmosféru při čtení.

## Jak text číst?

Nevytyčili jsme si za cíl podat kompletní přehled známých nerovností. Naopak se snažíme používat jen několik málo z nich a na příkladech demonstrovat jejich sílu při skloubení s důmyslnými metodami, z nichž některé byly vyvinuty teprve před několika lety. S tím je ale spojena jedna velká (ne)výhoda seriálu. Jeho nedílnou součástí je totiž velké množství cvičení a jsme přesvědčeni, že opravdový smysl začíná seriál mít až poté, co čtenář učiní rozhodnutí, že pro pochopení nerovností je ochoten věnovat i nějaký čas samostatné práci. Cvičení se snažíme volit tak, aby se čtenáři nezdála nudná ani příliš obtížná.

Na konci každého dílu uvádíme kromě tří seriálových úloh, které slouží k ověření nově nabytých znalostí, také tři těžší úlohy na přemýšlení.

## Poděkování

Chtěli bychom poděkovat především *Josefu Tkadlecovi* a *Martině Vaváčkové* za pečlivé pročtení celého seriálu a velké množství připomínek, které zvedly jeho kvalitu. Dále bychom chtěli poděkovat *prof. RNDr. Janu Malému, DrSc.*, který byl ochoten si náš text pročíst předtím, než jsme se jej odhodlali zveřejnit. Nakonec děkujeme i každému čtenáři za to, že jsme tuto práci nedělali zbytečně.

Pavel Šalom a Michal Rolínek

---

<sup>1</sup>Více najdete na <http://mks.mff.cuni.cz>.



## Obsah

<b>Nerovnosti, díl I</b>	<b>9</b>
Úvod a motivace . . . . .	9
Symetrické, cyklické a homogenní výrazy . . . . .	13
AG nerovnost . . . . .	17
Cauchyho nerovnost . . . . .	22
Úlohy na přemýšlení . . . . .	28
<b>Zadání 1. seriálové série</b>	<b>29</b>
<b>Řešení 1. seriálové série</b>	<b>31</b>
<b>Nerovnosti, díl II</b>	<b>35</b>
Těžké zbraně na lehké nerovnosti . . . . .	37
Permutační nerovnost . . . . .	46
Jensenova nerovnost . . . . .	51
AG a zlomky . . . . .	58
Cauchy a odmocniny . . . . .	60
Úlohy na přemýšlení . . . . .	62
<b>Zadání 2. seriálové série</b>	<b>63</b>
<b>Řešení 2. seriálové série</b>	<b>65</b>
<b>Nerovnosti, díl III</b>	<b>69</b>
Substituce . . . . .	69
Úprava výrazu . . . . .	76
Muirhead, Schur a kostičky . . . . .	78
Tvar SOS . . . . .	82
Hölderova nerovnost . . . . .	89
Zbraň hromadného ničení . . . . .	91
Cyklické nerovnosti . . . . .	97
Úlohy na přemýšlení . . . . .	100
<b>Zadání 3. seriálové série</b>	<b>101</b>
<b>Řešení 3. seriálové série</b>	<b>103</b>
<b>Dodatky</b>	<b>107</b>
<b>Literatura a zdroje</b>	<b>111</b>
<b>Závěr</b>	<b>113</b>





# Nerovnosti, díl I

## Úvod a motivace

Na samý úvod seriálu bychom vám chtěli pogratulovat k dobré volbě tématu. Nerovnosti jsou překrásnou (a také naší oblíbenou) kapitolou a budeme se snažit vaši důvěru oplatit poutavým, čtivým, zábavným a především poučným povídáním. Posuďte sami, jak se nám to bude dařit. Nuže, neotálejte dále a vrhněte se střemhlav do pestrého a podmanivého světa nerovností!

### Co to je nerovnost?

Jelikož nerovnostem budeme věnovat celý seriál, bylo by dobré si nyní vyjasnit, co to vlastně je. Úlohy, jimiž se budeme zabývat, budou vypadat zpravidla nějak takto:

**Úloha.** Ukažte, že pro všechna reálná čísla  $x, y, z$  platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Na rozdíl od nerovnic, s nimiž se běžně setkáváme na střední škole, tady nepátráme po tom, kdy daný vztah platí. U nerovností dokazujeme, že platí pro jakákoliv přípustná čísla (která to jsou, to se vždy dozvíme ze zadání). Nerovnosti mohou vypadat všelijak, od úplně jednoduchých, jako je třeba tato:

$$x^2 \geq 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

až po takové, s nimiž dlouhé měsíce neúspěšně zápasil i prezident české matematické olympiády *doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.*

**Úloha.** (Hodně těžká) Dokažte, že pro libovolná kladná čísla  $a, b, c$  platí

$$\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{bc}{4b^2 + c^2 + 4a^2} + \frac{ca}{4c^2 + a^2 + 4b^2} \leq \frac{1}{3}.$$

V centru naší pozornosti budou převážně nerovnosti, jejichž obtížnost leží někde mezi uvedenými příklady.

Na nerovnostech je zajímavé, že na ně neexistuje žádná univerzální metoda. U každé nerovnosti musíme pečlivě rozmýšlet, z které strany povedeme svůj útok. V tomto seriálu se naučíme několik základních i pokročilých výpadů a také to, jak u nerovnosti poznat, který z nich zvolit.

### K čemu jsou nerovnosti dobré?

Ke spoustě věcí! Schopnost poměřovat algebraické výrazy zaručeně uplatníte. Algebraická představitost a intuice, kterou získáte, bude neocenitelná; jak na střední, tak později i na vysoké škole (vysokoškolských aplikací je bezpočet). Mimoto se nerovnosti dají s úspěchem používat v úlohách podobných těm z našeho semináře či z matematické olympiády (dále jen MO). Však například nedávné celostátní kolo MO 2009 přímo obsahovalo důkaz jedné nerovnosti a podobných případů z posledních let je mnoho. Pro účast v mezinárodních soutěžích je znalost základních nerovností téměř nutná. Nemáte-li ovšem ambice v MO, pak vám snad bude stačit vědět, že nerovnosti jsou zkrátka pěkné a často se v jejich důkazech objevují originální myšlenky. Jejich studium je díky tomu velmi obohacující.

### Nejjednodušší nerovnosti a jejich důkazy

Tu nejjednodušší nerovnost jsme si již ukázali, nicméně její význam je obrovský, a tak si zaslouží zopakování:

$$x^2 \geq 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Ano, druhá mocnina každého čísla je opravdu nezáporná. Pokud se vám tato nerovnost zdá trapně jednoduchá, pak vezte, že její důsledky jsou nedozírné. Například si představte, že byste měli dokazovat nerovnost

$$(x^2 - 3x + 1)^2 \geq 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

v níž by ovšem levá strana byla roznásobená! Objevit, že se jedná o druhou mocninu, by jistě dalo dost práce, a to jsme zdaleka nepoužili nejtěžší možný příklad. Taková „zvěrstva“ ale v tomto seriálu provádět nebudeme. :)

Nejpoužívanější důsledky nezápornosti druhé mocniny jsou uvedeny v následujících příkladech.

**Příklad.** Pro každé  $x, y \in \mathbb{R}$  platí

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

*Důkaz.* Snadno spatříme, že tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti  $(x - y)^2 \geq 0$ , která jistě platí.

**Příklad.** Pro jakákoliv kladná čísla  $a, b$  platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

*Důkaz.* Jistě platí

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Vydělme tuto nerovnost číslem (kladným, znaménko se tedy nezmění!)  $ab$  a získáme

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

což je přesně nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

**Cvičení.** (Důležité) Rozmyslete si, že platí následující tvrzení:

- (i) Přičteme-li k oběma stranám nerovnosti stejné číslo, dostaneme platnou nerovnost.
- (ii) Vynásobíme-li obě strany nerovnosti kladným číslem, získáme platnou nerovnost.
- (iii) Sečtením dvou platných nerovností získáme platnou nerovnost.
- (iv) Vynásobením dvou platných nerovností mezi kladnými čísly (rozumějte: na obou levých i pravých stranách jsou kladná čísla) získáme platnou nerovnost.

**Poznámka.** Kdykoliv požadujeme, aby čísla byla kladná, máme k tomu důvod.

Ještě si na příkladu ukážeme, jak by měl vypadat pěkný důkaz nerovnosti. Často se totiž postup, díky němuž nerovnost vyřešíme, liší od důkazu, který pak napíšeme. Sledujte!

**Příklad.** Pro  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  dokažte

$$(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

*Postup.* (Takhle na to přijdeme . . . ) Levou stranu roznásobíme a po odečtení trojky od obou stran nerovnosti nám zbyde dokázat

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 6.$$

Nyní si vzpomeneme, že platí  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ , kdykoliv  $a, b > 0$ , a vidíme, že na levé straně jsou tři výrazy, které můžeme takto odhadnout:

$$\underbrace{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{c}{a} + \frac{a}{c}}_{\geq 2} \geq 6.$$

Levá strana je tedy aspoň 6 a jsme hotovi.

*Důkaz.* (. . . a takhle to zapíšeme.) Čísla  $a, b, c$  jsou kladná, takže platí nerovnosti  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ,  $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$  a  $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$ . Platí tedy i nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 6,$$

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

kteřou získáme součtem těchto tří. Nyní k oběma stranám nerovnosti přičteme číslo 3 a levou stranu zapíšeme ve tvaru součinu  $(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ . Získáme nerovnost

$$(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Ovšem přesně tuto nerovnost jsme měli dokázat (to je ale náhoda!), takže jsme hotovi.

Celá věda je v tom, že v matematice je slušné vycházet z něčeho, co platí, a postupně z toho něco dalšího vyvozovat. První řešení (Postup) se tedy dá snadno opravit poznámkou (bez ní by ale nebylo správně!), že všechny naše úpravy byly ekvivalentní, a můžeme tak celý postup obrátit. Přestože sami považujeme druhé řešení (Důkaz) za pěknější, většinou se v zájmu čitelnosti a srozumitelnosti uchýlíme k metodám z řešení prvního. Budete-li při psaní vašich řešení postupovat také tak, nezapomeňte na zmínku o ekvivalenci úprav!

### Zkuste si!

Tak a teď si poprvé v tomto seriálu můžete zkusit sami něco dokázat. Směle do toho!

**Cvičení.** Pro  $x, y \in \mathbb{R}$  ukažte

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

**Cvičení.** Ukažte, že pro libovolná kladná čísla  $a, b$  platí

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}.$$

**Cvičení.** Dokažte pro  $a, b$  taková, že  $a + b > 0$ , nerovnost

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

*Návod.* Ekvivalentně upravujte za použití vztahu  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ .

**Cvičení.** Pro  $x, y, z$  reálná čísla dokažte  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ .

*Návod.* Vynásobte dvěma a rozložte na součet tří nerovností.

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  ukažte

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

a rozhodněte, zda nerovnost platí i pro reálná čísla.

*Návod.* Vynásobte tři platné nerovnosti.

## Symetrické, cyklické a homogenní výrazy

Dříve, než se pustíme do nerovného boje s opravdovými nerovnostmi, se potřebujeme seznámit s některými pojmy, které nás budou provázet po zbytek seriálu.

Aby naše povídání bylo názornější, budeme si vše ukazovat na příkladech. Většinou nebudeme potřebovat více než tři proměnné, ovšem upozorníme i na složitější či obecnější případy. Všechny vlastnosti popsané v následujících odstavcích říkají, že výrazy, kterými se zabýváme, se chovají nějakým způsobem pěkně.

Definice budeme pro jednoduchost formulovat pro výrazy  $V$  závisící jen na třech proměnných  $a, b, c$ . Poznamenejme, že přestože v definicích mluvíme jen o výrazech, budeme je později aplikovat i na funkce či celé nerovnosti. Pusťme se do práce.

**Definice.** (Symetrie) Výraz  $V(a, b, c)$  nazveme symetrický, pokud se nezmění libovolnou záměnou<sup>2</sup> proměnných.

Pro více proměnných se symetrie definuje naprosto stejně. Podrobně rozepsáno, definice říká, že platí

$$V(a, b, c) = V(a, c, b) = V(b, a, c) = V(b, c, a) = V(c, a, b) = V(c, b, a).$$

Můžete si rozmyslet, že k tomu, aby byl výraz symetrický, stačí, když se nezmění při záměně libovolných dvou proměnných.

**Příklad.** Následující výrazy jsou symetrické:

$$a + b + c, \quad \frac{abc}{(ab + bc + ca)^2}, \quad \frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b}.$$

Důležité je pochopit, k čemu může být symetrie dobrá. Díky symetrii můžeme bez újmy na obecnosti<sup>3</sup> předpokládat, že platí  $a \geq b \geq c$ . Jestliže totiž zrovna platí jiné uspořádání, například  $b \geq a \geq c$ , zavedeme nové proměnné  $a' = b, b' = a, c' = c, a' \geq b' \geq c'$  a vidíme, že platí  $V(a', b', c') = V(b, a, c) = V(a, b, c)$ . Uspořádání je vhodné především proto, že výrazně zkracuje diskuzi během důkazu. Navíc rozpoznáme-li symetrickou nerovnost, může nám to napovědět, které techniky na ni budeme chtít použít. V neposlední řadě nám to poslouží jako kontrolní mechanismus (ekvivalentními úpravami symetrické nerovnosti dostaneme zase jen symetrickou nerovnost).

Přišla ta správná chvíle dokázat si první opravdovou nerovnost. Protože nejsme žádná ořezávátka, ukážeme si hned *Schurovu nerovnost*.

<sup>2</sup>Odborně říkáme, že se nezmění při libovolné permutaci.

<sup>3</sup>Tohoto úsměvného archaismu se příliš nelekejte, používá se v matematice zcela běžně, při jiných příležitostech jej ale nemůžeme doporučit. :) Někdy se zkracuje na búno. Dokonce i v anglické literatuře se používá zkratka wlog (without loss of generality).

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

**Tvrzení.** (Schurova nerovnost) *Pro všechna  $a, b, c \geq 0$  dokažte*

$$a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Všimneme si, že nerovnost je v proměnných  $a, b, c$  symetrická. Protože je to náš první příklad, rozevíšme jej poněkud podrobněji.

$$V(a, b, c) = a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b),$$

$$V(a, c, b) = a(a-c)(a-b) + c(c-a)(c-b) + b(b-a)(b-c),$$

platí tedy  $V(a, b, c) = V(a, c, b)$  a zcela analogicky platí všechny ostatní potřebné rovnosti. Symetrie je dokázána a můžeme přikročit k důkazu samotné nerovnosti.

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $a \geq b \geq c$ . Díky tomu ihned vidíme, že  $c(c-a)(c-b) \geq 0$ . Stačilo by nám tedy dokázat již jen

$$a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(a-b)(a-c) \geq b(a-b)(b-c).$$

Ovšem tato nerovnost platí triviálně, neboť  $a \geq b$ ,  $a-b = a-b$ ,  $a-c \geq b-c$  a jedná se vždy o nezáporná čísla. Důkaz je hotov.

Všimněte si, že u nerovností musíme dávat pozor na znaménka, protože například z nerovností  $0 \geq x \geq y$ ,  $u \geq v \geq 0$  bychom nemohli učinit závěr  $ux \geq vy$ .

Ve skutečnosti jsme vám zatajili, že Schurova nerovnost se většinou píše ve tvaru<sup>4</sup>

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0$$

pro  $a, b, c \geq 0$  a libovolné<sup>5</sup>  $k \geq 0$ . Dokáže se ale úplně stejně. Pro různá  $k$  dává velice zajímavé nerovnosti.<sup>6</sup>

**Definice.** (Cykličnost) Výraz  $V(a, b, c)$  nazveme cyklický, pokud se nezmění při provedení libovolné cyklické záměny, tj.

$$V(a, b, c) = V(b, c, a) = V(c, a, b).$$

**Příklad.** Následující výrazy jsou cyklické, avšak nikoliv symetrické

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \quad \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}.$$

Pro více proměnných si lze cyklickou záměnu představit tak, jako by proměnné seděly u kulatého otočného stolu, který pootočíme o několik pozic. Cyklickou záměnou pořadí proměnných  $x_1, \dots, x_n$  je tedy pořadí  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$  pro libovolné  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

<sup>4</sup>Dokonce existují další její zobecnění, například členy  $a^k, b^k, c^k$  lze nahradit členy  $f(a), f(b), f(c)$ , kde  $f$  je libovolná nezáporná monotónní funkce.

<sup>5</sup>Výraz  $0^0$  definujeme jako 1.

<sup>6</sup>Zkuste například komukoliv, kdo Schurovu nerovnost nezná, říct, aby dokázal nerovnost  $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$ , což je jenom roznásobený tvar Schurovy nerovnosti pro  $k = 1$ . Vsadíme boty, že se mu to nepodaří.

Je-li výraz  $V$  proměnných  $a, b, c$  jen cyklický, nemůžeme již předpokládat  $a \geq b \geq c$ , bez újmy na obecnosti lze však předpokládat alespoň to, že  $a$  je největší. Kdyby totiž bylo největší například  $c$ , provedeme cyklickou záměnu  $a' = c, b' = a, c' = b$ , tedy  $a'$  je nyní největší a dostáváme  $V(a', b', c') = V(c, a, b) = V(a, b, c)$ . Díky tomu je možné diskuzi během důkazu omezit na dva případy,  $a \geq b \geq c$  a  $a \geq c \geq b$ . Pro více proměnných nám však stále zůstává mnoho případů, které je nutné jeden po druhém diskutovat.

Následující zprvu neprůhledná definice popisuje situaci, v níž jsou v daném výrazu všechny členy v jistém smyslu stejného stupně.

**Definice.** (Homogenita) Výraz  $V(a, b, c)$  nazveme homogenní stupně  $\alpha$ , pokud existuje  $\alpha \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $t > 0$  platí

$$V(ta, tb, tc) = t^\alpha V(a, b, c).$$

**Příklad.** Následující výrazy jsou homogenní (postupně stupňů 1, 0 a  $-3$ ):

$$a + 2b + 3c, \quad \frac{a}{b} + \frac{bc}{a^2} + 5, \quad \frac{1}{a^3} + \frac{2b}{a^4} - \frac{1}{abc}.$$

Často nám bude stačit, že výraz je homogenní, a nebude nás příliš zajímat, jakého stupně. Například uvedená Schurova nerovnost je homogenní (ale pro každé  $k$  jiného stupně).

Důležité je pochopit, k čemu může být homogenita dobrá. Předpokládejme, že dokazujeme nerovnost  $V(a, b, c) \geq 0$  pro všechna  $a, b, c > 0$  (to bude později nejčastější případ), přičemž výraz  $V$  je homogenní. Vynásobením každé proměnné kladným číslem  $t$  vyjde nastejno jako vynásobením celé nerovnosti nějakým kladným číslem  $t^\alpha$ , a místo nerovnosti  $V(a, b, c) \geq 0$  tak můžeme dokazovat ekvivalentní nerovnost  $V(ta, tb, tc) = t^\alpha V(a, b, c) \geq 0$ . Díky tomu lze bez újmy na obecnosti předpokládat například, že  $a + b + c = 1$ . Kdyby totiž bylo  $a + b + c = s \neq 1$ , přešli bychom k novým číslům  $a' = \frac{1}{s}a, b' = \frac{1}{s}b, c' = \frac{1}{s}c$ ,  $a' + b' + c' = 1$  a dokazovali ekvivalentní nerovnost  $V(a', b', c') \geq 0$ . Samozřejmě můžeme místo podmínky  $a + b + c = 1$  zvolit nějakou jinou, třeba  $a^2 + b^2 + c^2 = 1, a = 42$ , případně  $abc = 1$ , a můžeme použít i mnoho jiných podmínek, které by mohly být v konkrétním případě užitečné.

**Poznámka.** Předpoklad, že čísla  $a, b, c$  jsou kladná je pro přechod k nerovnosti s podmínkou podstatný. Ve chvíli, kdy dělíme číslem  $t^\alpha$ , musíme mít jistotu, že není třeba otáčet znaménko nerovnosti.

**Cvičení.** Rozmyslete si, jak je třeba postupovat při práci s nezápornými  $a, b, c$ .

**Příklad.** Pro  $a, b \geq 0$  a  $s \geq r > 0$  dokažte

$$(a^r + b^r)^{1/r} \geq (a^s + b^s)^{1/s}.$$

**Řešení.** Protože nerovnost je homogenní (stupně 1), můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $a^r + b^r = 1$ . Pak je jisté  $1 \geq a, b \geq 0$ . Pro každé  $1 \geq x \geq 0$  ovšem platí  $x^r \geq x^s = x^r \cdot x^{s-r}$ , takže i  $1 = a^r + b^r \geq a^s + b^s$ , odkud ihned plyne  $1 \geq (a^s + b^s)^{1/s}$ , což jsme chtěli dokázat. Můžete si rozmyslet, že totéž lze provést pro libovolný počet proměnných.

Předešleme, že homogenní nerovnosti obvykle umíme dokazovat s větší úspěšností, a je proto někdy výhodné umět nehomogenní nerovnost zhomogenizovat. Takového postupu využíváme v úlohách, kde je zadána podmínka tvaru  $a + b + c = 1, abc = 1$  apod.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

**Příklad.** Pro  $a, b, c > 0$  splňující  $abc = 1$  dokažte

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 9.$$

*Řešení.* Levá strana je sice homogenní stupně 3, ovšem pravá strana je homogenní stupně 0, takže celá nerovnost homogenní není (výraz  $(ab + bc + ca)(a + b + c) - 9$  totiž není homogenní). Máme ale k dispozici podmínku  $abc = 1$ , jejíž levá strana je homogenní stupně 3, nabízí se tedy levou stranu původní nerovnosti vydělit jedničkou, čímž dostaneme

$$\frac{1}{abc}(ab + bc + ca)(a + b + c) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \geq 9,$$

což je homogenní nerovnost (stupně 0), kterou již umíme dokázat.

Samozřejmě se může stát, že homogenizace je o něco obtížnější a je potřeba k ní použít například homogenní výraz  $\sqrt{abc}$  stupně  $\frac{3}{2}$  a podobně.



### AG nerovnost<sup>7</sup>

Již ve cvičení z úvodní kapitoly jsme se setkali s nerovností  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$  platnou pro každé  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . Nyní ji zapíšeme ve tvaru

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

a budeme se jí a jejími zobecněními zabývat mnohem podrobněji. Jistě vás nepřekvapí, že výraz na levé straně se nazývá aritmetický průměr čísel  $x, y$  (aritmetickým průměrem  $n$  čísel rozumíme  $(x_1 + \dots + x_n)/n$ ). Výraz na pravé straně se běžně nazývá geometrický průměr čísel  $x, y$  (geometrickým průměrem  $n$  čísel rozumíme  $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ ). Vidíme, že aritmetický průměr je větší nebo roven geometrickému. Nabízí se otázka, zda toto tvrzení platí i pro více proměnných.

**Tvrzení.** (AG nerovnost) *Pro libovolná kladná čísla  $x_1, \dots, x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , platí*

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

*Důkaz.* Důkazů existuje celá řada,<sup>8</sup> ale bohužel pro ten nejelegantnější ještě nemáme dostatek znalostí. Nerovnost dokážeme indukcí. Pro  $n = 1$  dostáváme triviálně  $x_1 \geq x_1$ . Předpokládejme nyní, že pro každou  $n$ -tici tvrzení platí a dokážeme, že platí i pro  $(n + 1)$ -tici. Označme

$$L = \frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n + 1}.$$

Naším cílem bude přejít k  $n$ -tici, pro kterou můžeme použít indukční předpoklad. Vzhledem k tomu, že chceme dostat odhad pro  $L$ , je vhodné požadovat, aby zkonstruovaná  $n$ -tice měla aritmetický průměr  $L$  (stejný jako  $(n + 1)$ -tice). Na pravé straně se nám potom objeví všechna čísla zkonstruované  $n$ -tice, takže je přirozené použít v  $n$ -tici co nejvíce čísel z původní  $(n + 1)$ -tice. Jako  $n$ -tici si tedy vezmeme čísla  $x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n$ , kde  $x'_n$  zvolíme tak, aby

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + x'_n}{n} = L.$$

Odtud úpravou získáme

$$x'_n = \frac{n}{n + 1}(x_1 + \dots + x_{n+1}) - (x_1 + \dots + x_{n-1}) = x_n + x_{n+1} - L.$$

<sup>7</sup>Někdy se jí také říká nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

<sup>8</sup>Mimoходом jeden velmi zajímavý vymyslel Augustin Cauchy. O Cauchym se více dozvíte v následující kapitole.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

Pro tuto  $n$ -tici pak z indukčního předpokladu dostáváme odhad<sup>9</sup>

$$L^n \geq x_1 \cdots x_{n-1} x'_n \quad \Leftrightarrow \quad L^{n+1} \geq x_1 \cdots x_{n-1} x'_n L.$$

Naším přáním by tedy bylo, aby platila nerovnost  $x'_n L = (x_n + x_{n+1} - L) \cdot L \geq x_n x_{n+1}$ , protože pak bychom měli vyhráno. Ta je však ekvivalentní s nerovností  $(x_{n+1} - L)(L - x_n) \geq 0$ . Nyní si všimneme, že původní dokazovaná nerovnost je symetrická, takže můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $x_{n+1}$  je ze všech čísel největší, tj.  $x_{n+1} \geq L$ , a zároveň i to, že  $x_n$  je ze všech nejmenší, tj.  $x_n \leq L$ . Nerovnost  $(x_{n+1} - L)(L - x_n) \geq 0$  je pak splněna.

Podle poznámky pod čarou ještě potřebujeme ověřit, že jsme do AG nerovnosti nedosadili záporné číslo, ovšem  $x'_n = x_n + x_{n+1} - L > x_{n+1} - L \geq 0$  a důkaz je u konce.

Podívejme se ale ještě, kdy nastává rovnost. V průběhu důkazu je vidět, že nastane tehdy a jen tehdy, když je nejmenší nebo největší číslo rovno  $L$ , což může být jen v případě, že  $x_1 = \cdots = x_{n+1}$ .

**Poznámka.** Platnost AG-nerovnosti lze nahlédnout také intuitivně. Stojíme-li před úkolem najít kladná čísla  $a$  a  $b$  se součtem 100 (třeba) o největším možném součinu, snadno si rozmyslíme, že „čím blíže jsou si čísla  $a$  a  $b$ , tím vyšší je jejich součin“. AG nerovnost pro  $n$  proměnných vlastně neříká nic jiného. Kdyby například platilo  $x_1 > x_2$ , mohli bychom k sobě tyto proměnné „přiblížit“ při zachování součtu, čímž bychom zvýšili jejich součin (ostatní proměnné necháváme zafixované). Pravou stranu AG jsme zvětšili a levou zachovali. Vidíme tedy, že přibližováním proměnných si nerovnost „ztěžujeme“. Nejhorší možný případ tedy bude pro rovnost všech proměnných, tehdy ale v AG nastává rovnost, takže v ostatních „lehčích“ musí platit ta správná nerovnost.<sup>10</sup>

### Kdo by měl rád zlomky?

My zlomky nemáme vůbec rádi a tak většinou budeme AG nerovnost psát ve tvaru

$$x_1 + \cdots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Našemu bystrému zraku nemá šanci uniknout, že AG nerovnost je homogenní. Pojdme si ji ale už konečně ukázat na (zatím triviálním) příkladu.

**Příklad.** Pro  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

**Řešení.** Stačí užít AG nerovnost a ihned dostaneme  $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} = 3xyz$  a rovnost nastává pro  $x = y = z$ .

Rozepíšeme-li pravou stranu jako součet  $xyz + xyz + xyz$ , můžeme se na AG nerovnost dívat jako na mašinku, která z homogenní levé strany „vyplivne“ homogenní pravou

<sup>9</sup>Všimněte si, že teď právě děláme malý podvod. AG nerovnost máme právo použít jen pro kladná čísla, ale vůbec neověřujeme, jestli je nové číslo  $x'_n$  kladné. K tomu se vrátíme až na konci důkazu.

<sup>10</sup>Jistě jste si všimli, že tento postup není úplně matematicky korektní, nicméně s trochou vysokoškolské matematiky se dá snadno přetvořit v bezchybný důkaz. To ale není pro náš seriál podstatné.

stranu, zachová přitom počet sčítanců a „namíchá proměnné“. Kdybychom si člen  $x^3$  představovali jako  $x^3y^0z^0$ , můžeme pozorovat jen to, co se děje s exponenty: trojice  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$ ,  $(0, 0, 3)$  se po projetí AG mašinkou změní na  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$ . Díky tomu budeme dále umět dobře odhadovat, jaké nerovnosti půjdou velmi snadno AG mašinkou dokázat.

**Příklad.** Pro  $x, y \in \mathbb{R}^+$  dokažte

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2y.$$

*Řešení.* Stačí použít AG nerovnost, ovšem tentokrát nepatrně fikaněji. Kdybychom ji použili pro dvojici  $2x^3, y^3$ , dostaneme zcela jiný odhad. Ovšem na pravé straně vidíme trojku, chceme proto AG použít pro tři čísla, konkrétně pro  $x^3, x^3, y^3$ . Pak máme  $2x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^6y^3} = 3x^2y$ . Toto je zcela standardní postup. Stejný výsledek dostaneme, pokud v předchozím příkladu zvolíme  $x = z$ .

Rádi bychom ještě ukázali jednu zvláštnost AG nerovnosti – občas umí řešit naprosto nehomogenní úlohy.

**Příklad.** Pro  $x \in \mathbb{R}^+$  dokažte

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3.$$

*Řešení.* Použijeme postup podobný předchozí úloze, tj. AG nerovnost pro trojici  $x^2, 1/x, 1/x$  a dostaneme

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{x \cdot x}} = 3.$$

Jak už to v životě chodí, nic se nelze naučit bez samostatné snahy, zkuste si proto sami vyřešit následující cvičení. Věříme, že pro vás budou velmi snadná. Snažte se přitom zároveň sledovat, co se děje s exponenty.

**Cvičení.** Pro kladná  $x, y, z$  dokažte

- (i)  $x^3 + 2 \geq 3x$ ,
- (ii)  $\frac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x$ ,
- (iii)  $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$ ,
- (iv)  $2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 15xyz$ ,
- (v)  $x^3(x + 2y) + y^3(y + 2x) \geq 6x^2y^2$ .

### Sčítání AG nerovností

Velice užitečná technika je umět AG nerovnosti sčítat. Myšlenku si ukážeme rovnou na příkladu.

**Příklad.** Pro  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x.$$

*Řešení.* Zkusme nerovnost vynásobit třemi:

$$3x^3 + 3y^3 + 3z^3 \geq 3x^2y + 3y^2z + 3z^2x.$$

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

Podle jednoho z předchozích příkladů platí  $2x^3 + y^3 \geq 3x^2y$ , analogicky  $2y^3 + z^3 \geq 3y^2z$ ,  $2z^3 + x^3 \geq 3z^2x$ . Sečtením získáme dokazovanou nerovnost.

Jak ale na řešení přijít? Na levé i pravé straně máme tři sčítance, takže počet sčítanců sedí. Zabývejme se na chvíli jen otázkou, jak „namíchat“ aspoň nějaký násobek  $x^2y$ , máme-li k dispozici neomezené množství výrazů  $x^3, y^3, z^3$ . Odpověď známe:  $x^3, x^3, y^3$ . Použijeme-li AG mašinku, dostáváme  $x^3 + x^3 + y^3 \geq 3x^2y$ , z čehož už vidíme, že chceme nerovnost vynásobit třemi.

AG nám tedy umí z trojice exponentů  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$ ,  $(0, 0, 3)$  „vyplivnout“ exponenty  $(2, 1, 0)$ ,  $(0, 2, 1)$ ,  $(1, 0, 2)$ . Co když je ale situace složitější?

**Příklad.** Pro kladná  $x, y, z$  dokažte

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

*Řešení.* Zkusíme tedy namíchat nějaký násobek  $x^2yz$  z (neomezeného množství) výrazů  $x^3y, y^3z, z^3x$ . Ovšem na první ani na druhý pohled není jasné, jak to udělat. Dobrá, vezměme tedy výraz  $x^3y$  přesně  $a$ -krát, výraz  $y^3z$   $b$ -krát a výraz  $z^3x$   $c$ -krát ( $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ ). Tím se nám na pravé straně objeví  $(a + b + c)$ -tá odmocnina. Rozmyslete si (dívejte se na exponenty), že vlastně potřebujeme vyřešit následující soustavu:<sup>11</sup>

$$3a + 0b + 1c = 2(a + b + c)$$

$$1a + 3b + 0c = 1(a + b + c)$$

$$0a + 1b + 3c = 1(a + b + c).$$

První rovnici jsme dostali pozorováním exponentů proměnné  $x$ , druhou pozorováním  $y$  a třetí vznikla pro exponenty  $z$ . Řešením soustavy jsou například<sup>12</sup> čísla  $a = 4, b = 1, c = 2$ . Platí tedy  $4x^3y + y^3z + 2z^3x \geq 7x^2yz$ . Pokud původní nerovnost vynásobíme sedmi a sečteme tři AG nerovnosti (zbývající dvě získáme cyklickou záměnou), dostaneme přesně dokazovanou nerovnost.

**Cvičení.** Pro kladná  $x, y, z$ , resp. kladná  $a, b, c$  dokažte

(i)  $x^7 + y^7 + z^7 \geq x^5y^2 + y^5z^2 + z^5x^2$ ,

(ii)  $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3y + y^3z + z^3x$ ,

(iii)  $x^4y + y^4z + z^4x \geq x^2y^2z + y^2z^2x + z^2x^2y$ ,

(iv)  $(x + y + z)^2 \geq 3(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy})$ ,

(v)  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ ,

(vi)  $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$ ,

(vii)  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$ .

*Návod.* Nemáte-li rádi odmocniny, zvolte v (iv) substituci  $x = a^2, y = b^2, z = c^2$ .

Jak vidíme, AG nerovnost je velmi účinná zbraň na homogenní nerovnosti. Pochopitelně lze situaci začít komplikovat a vymýšlet stále složitější příklady.

<sup>11</sup>Všimněte si, že soustava je homogenní, takže kdybychom měli rádi zlomky, můžeme klidně předpokládat, že  $a + b + c = 1$ . Pak již ale nebudou  $a, b, c$  přirozená.

<sup>12</sup>Soustava má sice nekonečně mnoho řešení, která jsou všechna násobky tohoto, ale pro naše účely stačí nalézt jediné celočíselné řešení. Můžete si rozmyslet, že nezáleží na tom, které vezmeme.

**Příklad.** Pro kladná  $a, b, c$  splňující  $abc = 1$  dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

(Celostátní kolo MO 2003)

*Řešení.* Nerovnost se pokusíme zhomogenizovat, protože homogenní nerovnosti umí dobře řešit AG mašinka. Homogenizace je zde o něco obtížnější, potřebujeme výraz stupně  $-1$ , použijeme proto  $(abc)^{-1/3} = 1$ .

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{(abc)^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{(abc)^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{(abc)^{\frac{1}{3}}}$$

Tuto nerovnost se pokusíme dokázat pro všechna  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  pomocí AG. Nemáme rádi odmocniny, a tak raději provedeme substituci  $a = u^3$ ,  $b = v^3$ ,  $c = w^3$ , čímž dostaneme nerovnost

$$\frac{u^3}{v^3} + \frac{v^3}{w^3} + \frac{w^3}{u^3} \geq \frac{u^2}{vw} + \frac{v^2}{wu} + \frac{w^2}{uv},$$

která už je pro vás určitě snadnou kořistí.

### Vše není tak snadné

Určitě jste si všimli, že v úlohách, kde je potřeba řešit soustavu rovnic, nemáme zaručeno, že soustava bude mít řešení. Navíc potřebujeme, aby řešením byla jen kladná čísla (do AG nerovnosti nelze kvůli odmocninám dosazovat záporná čísla). V takových případech bohužel nezbývá než přiznat, že AG nerovnost nelze přímočaře použít.

Mezi další problémové nerovnosti patří například ta následující.

**Cvičení.** (Nekonečné) Pro kladná  $a, b, c$  zkuste pomocí AG řešit

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

Problémy dělá hlavně člen  $abc$ . Všimněme si, že AG mašinka vždy exponenty jaksi „dávala k sobě“, například z  $(3, 0, 0)$  umí udělat  $(2, 1, 0)$ . Ovšem tady chceme některé exponenty dávat k sobě a jiné naopak dávat „od sebe“. Nerovnost ale i přesto platí, je to přece (roznásobená) Schurova nerovnost pro  $k = 1$ .

Cauchyho nerovnost<sup>13</sup>

Augustin Cauchy (čteme *kóši*) (1789–1857) byl francouzský matematik, který značně přispěl k rozvoji vznikající disciplíny, které dnes říkáme matematická analýza. Ve své publikaci *Œuvres*<sup>14</sup> z roku 1821 se zmiňuje o nerovnosti, která se později stane jedním ze základních pojmů celé vysokoškolské matematiky. Její využití však není svázané pouze s „vyšší“ matematikou. Jak uvidíte, Cauchyho nerovnost (občas ji budeme zkráceně nazývat CS) je jedním ze základních nástrojů při práci s nerovnostmi vůbec a pro ambiciózní řešitele MO je její znalost již nutností. Může se zdát na první pohled nepřehledná, ale její možnosti jsou netušené a stojí za to s ní strávit pár minut. Pokud by se vám nedařilo zapamatovat si, která strana CS je větší, pak pamatujte, že „*dvě závorky jsou víc než jedna*“.

**Tvrzení.** (Cauchyho nerovnost) *Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Dále buďte  $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ . Pak platí*

$$(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2.$$

*Důkaz.* Uvažme kvadratickou rovnici v proměnné  $x$ :

$$(u_1x - v_1)^2 + (u_2x - v_2)^2 + \dots + (u_nx - v_n)^2 = 0.$$

Levá strana rovnice je evidentně nezáporná, a rovnice tak může mít nanejvýš jeden kořen. Speciálně musí mít nekladný diskriminant. Napišme si rovnici ve tvaru  $Ax^2 + Bx + C$  a dopočtěme

$$\begin{aligned} A &= u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2, \\ B &= -2(u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n), \\ C &= v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2. \end{aligned}$$

Nerovnost  $B^2 - 4AC \leq 0$  si zapíšeme jako  $AC \geq \left(\frac{B}{2}\right)^2$ , dosadíme a máme

$$(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2,$$

což je přesně Cauchyho nerovnost, a jsme hotovi.

<sup>13</sup>V literatuře se také používá název Cauchy-Schwarzova, či dokonce Cauchy-Schwarz-Buňakovského.

<sup>14</sup>V překladu „Umělecká díla“.

### A co rovnost?

Rovnost nastane, právě když je diskriminant původní rovnice roven 0. Neboli, právě když existuje  $x \in \mathbb{R}$ , které vynuluje všechny závorky na levé straně. Jinými slovy, pro takové  $x \in \mathbb{R}$  musí platit

$$v_1 = xu_1, v_2 = xu_2, \dots, v_n = xu_n.$$

**Cvičení.** Buď  $ABC$  trojúhelník o stranách  $a, b, c$  a  $KLM$  trojúhelník o stranách  $k, l, m$ . Ukažte, že

$$(a^2 + b^2 + c^2)(k^2 + l^2 + m^2) = (ak + bl + cm)^2,$$

právě když  $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ .

### Jde to i jinak?

Předchozí důkaz Cauchyho nerovnosti byl velmi trikový a na něco takového je velice těžké přijít. Nabízíme proto ještě jeden, v němž přímočaře využijeme, co jsme se již naučili.

*Důkaz.* Všimneme si, že dokazovaná nerovnost je v proměnných  $u_1, u_2, \dots, u_n$  homogenní. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že platí  $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 1$ . Nerovnost přejde do tvaru

$$(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2.$$

Ovšem tato nerovnost je stále ještě homogenní, tentokrát v proměnných  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Opět bez újmy na obecnosti zvolme  $v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = 1$ . Nyní chceme za učiněných předpokladů o proměnných  $u_i$  a  $v_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , dokázat, že

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2 \leq 1.$$

O platnosti předchozí nerovnosti se přesvědčíme, pokud ukážeme, že umocňovaný součet na levé straně leží mezi čísly  $-1$  a  $1$ .

Zcela zřejmě platí  $u_iv_i \leq \frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2$  pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Pokud všechny tyto nerovnosti sečteme, získáme

$$u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \leq \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2) + \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) = 1.$$

Jeden z potřebných odhadů je tedy hotov, druhý dokážeme obdobně za využití

$$u_iv_i \geq -\left(\frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2\right).$$

### Bližší seznámení

Zkusme si nyní do CS něco dosadit, abychom získali představu, jaké druhy nerovností nám může dát. Zvolme například  $n = 3$ ,  $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c$  a  $v_1 = 1/a, v_2 = 1/b, v_3 = 1/c$ . Dostaneme nerovnost

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9.$$

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

Všimněte si, že bychom nyní mohli substituovat  $x = a^2$ ,  $y = b^2$ ,  $z = c^2$ , a získat tak nerovnost

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \quad \text{pro } x, y, z > 0,$$

kteřou jsme již ukazovali. Tuto nerovnost jsme mohli z Cauchyho nerovnosti dostat přímo volbou  $u_1 = \sqrt{a}$ ,  $u_2 = \sqrt{b}$ ,  $u_3 = \sqrt{c}$  a  $v_1 = 1/\sqrt{a}$ ,  $v_2 = 1/\sqrt{b}$ ,  $v_3 = 1/\sqrt{c}$ . Takovou volbu lze samozřejmě udělat jen pro  $a, b, c > 0$ . Pro Cauchyho nerovnost je dokonce typické, že ač platí pro jakákoliv reálná čísla, nerovnosti, jež s její pomocí odvodíme, platí jen pro čísla kladná.

**Cvičení.** Zkuste nyní pomocí vhodné volby proměnných v CS dokázat následující nerovnosti pro kladná čísla  $a_i, b_i, i = \{1, \dots, n\}$ .

- (i)  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$
- (ii)  $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \left( \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \right) \geq (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2$
- (iii)  $n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$

*Návod.* V příkladu (iii) si  $n$  rozepište jako součet jedniček.

**Cvičení.** Pomocí CS dokažte pro přípustná  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  nerovnosti

- (i)  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}$ ,
- (ii)  $14(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$ ,
- (iii)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12$ .

*Návod.* V příkladu (iii) použijte výsledek příkladu (iii) z minulého cvičení.

### Pryč se zlomky!

Nyní nadešel čas, abychom odhalili, v čem tkví síla CS. Z předchozích kapitol již tušíte, že těžké jsou většinou ty nerovnosti, v nichž se vyskytnou zlomky. No a CS je pro takové nerovnosti jako stvořená. Nejprve si na příkladu ukážeme, jak to funguje.

**Příklad.** Dokažte pro  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  nerovnost

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

*Řešení.* Napíšeme si následující CS (teď už byste měli vidět, jak přesně CS používáme, a pokud ne, ještě jednou si projděte předchozí cvičení)

$$\left( \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} \right) ((y+z) + (z+x) + (x+y)) \geq (x+y+z)^2$$

a vidíme, že druhá závorka na levé straně je rovna  $2(x+y+z)$ , tedy můžeme krátit s pravou stranou. Po vykrácení a vydělení dvěma dostaneme přímo dokazovanou nerovnost.



Tento příklad byl sice Cauchyho nerovnosti ušit na míru, nicméně dává tušit, že CS a zlomky jdou dobře dohromady.

### Jak to přesně funguje?

Než popíšeme základní princip používání CS, bude užitečné uvést si ještě jeden její tvar.

**Tvrzení.** (CS zlomkobijec) *Necht*  $n \in \mathbb{N}$ . *Dále buďte*  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$ . *Pak platí*

$$\left( \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \right) \geq \frac{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n})^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

**Cvičení.** Ověřte, že předchozí tvrzení je skutečně důsledkem CS.

Představme si, že dokazujeme nerovnost, jejíž levá strana je ve tvaru součtu tří zlomků:

$$L = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_3}{B_3} \geq P.$$

Pak podle CS *zlomkobijce* platí

$$L \geq \frac{(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3})^2}{B_1 + B_2 + B_3}.$$

Stačilo by tedy dokázat, že onen roztodivný výraz z předchozího řádku je větší nebo roven pravé straně dokazované nerovnosti. Zdá se, že jsme si mnoho nepomohli, ale zpravidla bývá takováto nerovnost o poznání snazší a její vyřešení je často jen procvičením AG.

### Dobrá a špatná zpráva

V předchozím odstavci jsme popsali, jak od dokazování těžké nerovnosti se zlomky můžeme přejít k dokazování lehké nerovnosti beze zlomků. Ovšem než začneme tento postup používat na příkladech, máme tu jednu dobrou a jednu špatnou zprávu.

Začneme tou špatnou. Ona lehčí nerovnost, na níž tu původní převedeme, nemusí platit. Nikdo nám nezaručuje, že odhad provedený pomocí CS zlomkobijce se opravdu vklíní mezi levou a pravou stranu dokazované nerovnosti. Tento jev je bohužel velmi běžný, proto se na něj raději psychicky připravme.

Máte-li chuť v tuto chvíli trhat stránky tohoto seriálu, zadržte! Situace není zdaleka tak zoufalá, jak se zdá. Je tu ještě ona dobrá zpráva, kterou jsme slíbili. Čtete pozorně. Jak už víme, CS zlomkobijec vezme nerovnost se zlomky a místo ní nám dá nerovnost bez nich, která stačí k důkazu té původní. My ale můžeme ještě předtím, než zlomkobijce na naši nerovnost vypustíme, její tvar trochu pozměnit. Například zlomky libovolně rozšíříme (ano, i tak banální úprava stačí!). No a vtip je v tom, že pokaždé, když zlomky na levé straně upravíme, dostaneme od zlomkobijce k důkazu jinou nerovnost. Situace se obrací. Ještě před chvílí to vypadalo tak, že dostaneme dokázat nerovnost, která ještě k tomu

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

nejspíš neplatí, nyní se ale zdá, že dostaneme na výběr z bezpočtu nerovností, z nichž nám stačí dokázat jedinou! Jak už to bývá, pravda je někde uprostřed. Většinou máme na výběr několik nerovností (ne všechna rozšíření jsou „rozumná“), které můžeme dokazovat, přičemž tou dobrou zprávou je, že zpravidla alespoň jedna z nich platí. A bývá to ta od pohledu nejsympatičtější, ale to už si ukážeme na příkladu.

### Konečně příklad

**Příklad.** Dokažte pro  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

*Řešení.* Zkusme nejprve použít CS zlomkobijce tupě na tento tvar. Získáme

$$L \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{2(a+b+c)}.$$

Nyní bychom chtěli dokázat, že

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

Ovšem po pár řádcích ekvivalentních (!) úprav (zkuste si) přejde nerovnost do tvaru

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \geq a + b + c$$

a o této nerovnosti již z předchozích kapitol víme, že neplatí (dokonce platí opačná nerovnost)! První pokus nám nevyšel. Zkusme tedy, než zlomkobijce opět vypustíme, rozšířit každý ze zlomků tak, abychom si v čitatelích vytvořili druhé mocniny:

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}.$$

Druhé mocniny v čitatelích se nám náramně hodí, neb nás to později zbaví odmocnin, o nichž každý slušný matematik ví, že jsou ošklivé. Vypustíme zlomkobijce!

$$L \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Nerovnost, kterou máme nyní dokázat, se velmi rychle ukáže ekvivalentní nerovnosti

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

o níž víme, že platí. Dokázali jsme tedy

$$L \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}$$

a jsme hotovi!

### A teď vy!

Konečně můžeme sezobat plody naší práce a pomocí CS zlomkobijce snadno dokázat nerovnosti, které pro nás byly ještě před chvílí naprosto neřešitelné. Jak uvidíte, jedná se o nerovnosti převzaté z prestižních matematických soutěží. Malé připomenutí na závěr: dobré rozšíření se pozná tak, že nevyrobí žádné odmocniny.

**Cvičení.** Buďte  $a, b, c, d$  kladná čísla splňující  $a + b + c + d = 1$ . Ukažte, že platí

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(Irsko 1999)

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí 1999)

**Cvičení.** Necht'  $a, b, c$  jsou kladná čísla a jejich součin je roven jedné. Dokažte

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

**Cvičení.** Dokažte, že pro jakákoliv kladná čísla  $a, b, c$  platí

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

(Turnaj měst 1998)

*Návod.* Zkuste si jen tak pro zábavu roznásobit  $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ .

### Úlohy na přemýšlení

Zdají-li se vám všechna cvičení z našeho seriálu lehká, připravili jsme pro vás pár ostřejších kousků. K řešení těchto úloh není potřeba použít teorii nad rámec prvního dílu seriálu.

**Příklad.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte nerovnost

$$(a - b)^2(a + b - c) + (b - c)^2(b + c - a) + (c - a)^2(c + a - b) \geq 0$$

a vyvoďte z ní nerovnost

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

**Příklad.** Buďte  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  taková, že  $abc = 1$ . Dokažte

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^5 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^5} \leq 3.$$

(IMO 2005)

**Příklad.** Ukažte, že pro  $x, y, z \geq 1$  platí

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x(yz+1)}.$$

# Zadání 1. seriálové série

**Úloha 1.** Buďte  $a, b, c$  kladná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte nerovnost

$$a^5b + b^5c + c^5a \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Určete všechny případy, v nichž nastává rovnost.

**Úloha 2.** Buď  $n \in \mathbb{N}$  a mějme kladná čísla  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  a  $c_1, \dots, c_n$ . Dokažte nerovnost

$$\begin{aligned} (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \dots + a_nb_nc_n)^3 &\leq \\ &\leq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3) \end{aligned}$$

a určete, kdy nastává rovnost.

**Úloha 3.** Ukažte, že pro kladná čísla  $a, b, c$  splňující  $a + b + c = 1$  platí

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10},$$

a určete, kdy nastává rovnost.



# Řešení 1. seriálové série

Každé řešení je doplněno o poznámku obsahující drobná dovysvětlení, upozorňující na kroky, které činily problémy, apod. Poznámky vznikly na základě řešení zaslaných řešiteli MKS.

**Úloha 1.** Podle AG nerovnosti platí

$$11a^5b + 2b^5c + 8c^5a \geq 21 \sqrt[21]{a^{63} \cdot b^{21} \cdot c^{42}} = 21a^3bc^2$$

a sečtením dalších dvou cyklicky získaných nerovností dostaneme

$$21(a^5b + b^5c + c^5a) \geq 21(a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2).$$

Protože však podle zadání  $abc = 1$ , můžeme všechny členy na pravé straně vydělit výrazem  $(abc)^2 = 1$  a dostaneme

$$a^5b + b^5c + c^5a \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Rovnost nastává v případě, že jsme do AG mašinky vložili stejná čísla, tj.  $a^5b = b^5c = c^5a$ . Vzhledem k cykličnosti těchto rovnic můžeme předpokládat, že  $a$  je největší. Je-li však ostře větší než jedno ze zbývajících čísel, je  $a^5b > b^5c$ , a tudíž nutně  $a = b = c$ , což vzhledem k podmínce  $abc = 1$  znamená, že  $a = b = c = 1$ .

Předvedené řešení je kompletní a zapsané ve směru, co z čeho vyplývá. Samozřejmě, že když jsme na něj chtěli přijít, postupovali jsme opačně. Nejdříve jsme zadanou nerovnost zhomogenizovali vynásobením pravé strany výrazem  $(abc)^2$ , čímž jsme ji přichystali pro AG mašinku. K nalezení koeficientů 11, 2, 8 jsme si napsali nerovnost

$$xa^5b + yb^5c + zc^5a \geq \sqrt[x+y+z]{a^{5x+0y+1z} \cdot b^{1x+5y+0z} \cdot c^{0x+1y+5z}} = a^3bc^2$$

a porovnáním exponentů jsme dostali soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejímž řešením jsou třeba právě čísla 11, 2, 8.

**Poznámka.** Mnoho řešitelů zapomnělo, že jsme se ptali i na všechny případy, v nichž nastane rovnost. A pozor! Nelze obecně tvrdit, že kvůli použití AG nastane rovnost jen pro  $a = b = c$ . Například i Cauchyho nerovnost lze dokázat pomocí AG, a jak víme,

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

rovnost v Cauchyho nerovnosti nastává i jindy, než když se všechny proměnné rovnají. Je proto potřeba z rovností  $a^5b = b^5c = c^5a$  nějak (třeba opět řešením soustavy nebo postupem ze vzorového řešení) dojít k podmínce  $a = b = c = 1$ .

**Úloha 2.** Všimneme si, že nerovnost je homogenní jak v proměnných  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , tak v proměnných  $b_1, \dots, b_n$ , a dokonce i v proměnných  $c_1, \dots, c_n$  (ve všech třech případech se jedná o homogenitu stupně 3). Lze proto přejít k proměnným  $d_1, \dots, d_n, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$  takovým, že  $d_1^3 + \dots + d_n^3 = 1, e_1^3 + \dots + e_n^3 = 1, f_1^3 + \dots + f_n^3 = 1$ , a dokazovat nerovnost jen pro ně. Tím nám zbyde dokázat ekvivalentní nerovnost

$$(d_1e_1f_1 + \dots + d_ne_nf_n)^3 \leq 1,$$

v níž je vynechání třetí mocniny ekvivalentní úpravou. Z AG nerovnosti ovšem pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  plyne

$$d_ie_if_i \leq \frac{d_i^3 + e_i^3 + f_i^3}{3}$$

a sečtením všech těchto nerovností dostaneme

$$\sum_{i=1}^n d_ie_if_i \leq \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^n d_i^3 + \sum_{i=1}^n e_i^3 + \sum_{i=1}^n f_i^3 \right) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1.$$

Rovnost nastane, právě když pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  platí  $d_i = e_i = f_i$ , což v řeči původních proměnných znamená, že existují kladné konstanty  $\lambda, \mu$  takové, že  $a_i = \lambda b_i = \mu c_i$  pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Poznámka.** Řešitelé často při vyšetřování rovnosti napsali, že nastává jen v případě  $a_i = b_i = c_i$ . Je důležité si uvědomit, že v AG nerovnosti už nepoužíváme původní proměnné, ale nové proměnné, které jsou jejich násobky.

Dále se někteří domnívali, že je potřeba dokazovat dvě nerovnosti

$$-\frac{d_i^3 + e_i^3 + f_i^3}{3} \leq d_ie_if_i \leq \frac{d_i^3 + e_i^3 + f_i^3}{3},$$

protože něco podobného se objevilo v důkazu Cauchyho nerovnosti. To není pravda hned z několika důvodů. Předně chceme nerovnost dokázat jen pro kladná čísla, protože pro záporná ani neplatí (dosaďte  $a_1 = 1, a_2 = -1, b_1 = 1, b_2 = 1, c_1 = 10, c_2 = 1$ ). Další důvod je ten, že v důkazu Cauchyho nerovnosti jsme v jednom kroku potřebovali odstranit druhou mocninu, zatímco v této úloze se chceme zbavit třetí mocniny, a platí  $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1$ , zatímco  $x^3 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$ .

**Úloha 3.** Úloha nabádá k použití CS zlomkobijce. Rozšířme tedy zlomky tak, abychom v čitatelích vytvořili druhé mocniny, a odhadněme levou stranu

$$\frac{a^2}{a+abc} + \frac{b^2}{b+abc} + \frac{c^2}{c+abc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc} = \frac{1}{1+3abc}.$$

V poslední rovnosti jsme využili podmínku  $a+b+c=1$ . Zbývá ověřit, zda platí

$$\frac{1}{1+3abc} \geq \frac{9}{32}.$$



## ŘEŠENÍ 1. SERIÁLOVÉ SÉRIE

Tato nerovnost je ekvivalentní (po krátké úpravě) nerovnosti  $1 \geq 27abc$ . Tu zpětně homogenizujeme dosazením  $1 = (a + b + c)^3$  a bryskně upravíme do ekvivalentní podoby

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

kteřá je ovšem pouhou AG nerovností pro tři prvky. Nerovnost tedy platí.

Pokud pro nějakou trojici čísel platí v původní nerovnosti rovnost, musí pro ni rovnost platit v každém z dílčích odhadů. Speciálně při použití AG nerovnosti pro čísla  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , v níž rovnost nastává pouze pro  $a = b = c$ . Jediným kandidátem na rovnost je tedy trojice  $a = b = c = \frac{1}{3}$ , pro níž snadno ověříme, že rovnost skutečně nastane.

**Poznámka.** Občasné nedokonalosti se týkaly vyšetřování rovnosti, protože bylo potřeba ověřit, že pro  $a = b = c = \frac{1}{3}$  rovnost skutečně nastane (rozmyslete si).



# Nerovnosti, díl II

V tomto dílu si vybudujeme rozsáhlý arzenál důkazových metod na práci s nerovnostmi všeho druhu. Kromě toho se naučíme dvě nové známé nerovnosti, které nám poskytnou do světa nerovností ten správný vhled. Přestože je studijní text vcelku dlouhý, věříme, že ho zhltnete téměř jedním dechem, neboť myšlenkové úvahy jsou zde zcela prostinké a dozajista si je osvojíte hned po prvním přečtení. Tak tedy dost povídání, dejme se do práce!

## Ztrátové a bezztrátové metody

Nyní, když se chystáme dokazovat těžší nerovnosti, je dobré si jednu věc pořádně rozmyslet. Náš postup bude obecně vypadat tak, že dokazovanou nerovnost budeme pomocí různých metod převádět na nerovnosti jednodušší, až se objeví nějaká, která půjde snadno dokázat. Metody, které k tomu budeme používat, se dělí do dvou skupin. V první skupině jsou tzv. *bezztrátové* metody. Ty dokazovanou nerovnost převedou na jinou nerovnost, která je **ekvivalentní** té původní. Sem patří například různé substituce či třeba ekvivalentní úpravy. Metodami z druhé skupiny, říkáme jim *ztrátové*, dokazovanou nerovnost rovněž převedeme na jinou nerovnost, ale již ne ekvivalentně. To znamená, že o této nové nerovnosti s jistotou nevíme, zda platí. S tímto jsme se již setkali při používání CS zlomkobijce.

Ideální by bylo, kdybychom uměli každou nerovnost řešit jen postupným používáním bezztrátových metod. Prostě bychom ekvivalentně převedli nerovnost těžkou na nerovnost jednoduchou. Takhle nudný ovšem svět nerovností není! Většinou totiž platí, že ztrátové metody, kterých je většina (jsou to vlastně všechny odhady, které učiníme), zjednodušují nerovnost o dost více než metody bezztrátové. Obě metody je tedy třeba vhodně kombinovat.

**Cvičení.** (Důležité!) Rozmyslete si, že pro kladná čísla  $a, b, c$  je přechod od homogenní nerovnosti k nerovnosti s podmínkou (např.  $a + b + c = 1$ ) bezztrátový. Opačný přechod od nerovnosti s podmínkou k homogenní nerovnosti bez podmínky je rovněž bezztrátový!

*Návod.* Ukažte, že pokud existuje trojice, pro niž neplatí jedna z nerovností, pak lze najít i trojici, pro niž neplatí druhá.

**Cyklický zápis výrazů**

Protože nerovnosti jsou někdy náročné nejen na kombinaci používaných metod, ale i na algebraické úpravy, mohlo by se poměrně snadno stát, že bychom se při úpravách zbláznili. Zkusili jste někdy roznásobit nerovnost obsahující zlomky, nebo roznásobit dvě závorky, z nichž každá má devět členů? Aby nám k takovým šílenostem nechyběla odvaha, zavedeme si zkrácený zápis, tzv. cyklickou sumu  $\sum_{\text{cyc}}$ . Jelikož většina výrazů, se kterými pracujeme, má (alespoň) cyklický charakter, stačí místo velkého množství členů zapsat jen vybrané, a pokud lze všechny ostatní z vybraných získat cyklickou záměnou proměnných, je snadné si domyslet celý výraz.

V následujících příkladech uvažujme výrazy ve třech proměnných  $a, b, c$ .

**Příklad.** Ukážeme několik zápisů pomocí cyklické sumy.

- (i)  $\sum_{\text{cyc}} a = a + b + c,$
- (ii)  $\sum_{\text{cyc}} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a,$
- (iii)  $9 \sum_{\text{cyc}} a\sqrt{a+bc} = 9(a\sqrt{a+bc} + b\sqrt{b+ca} + c\sqrt{c+ab}).$

Zápis pomocí cyklické sumy tedy funguje tak, že přestože zapíšeme jen jeden výraz, máme na mysli součet **všech** výrazů, které vzniknou cyklickou záměnou proměnných (sčítanců je tolik, kolik je proměnných). Doporučujeme si cyklický zápis velmi dobře osvojit a naučit se s ním počítat.

## Těžké zbraně na lehké nerovnosti

V této kapitole si na příkladech ukážeme několik nových postupů (převážně bezztrátových), jejichž znalost nám spolehlivě umožní řešit jednoduché nerovnosti, například nerovnosti dvou proměnných či nerovnosti nízkých stupňů. Přestože často půjde o postupy, při nichž je potřeba i trochu počítat, je opravdu nutné, abyste si tyto techniky osvojili a nabyli dojmu, že některé nerovnosti jsou již z principu snadno řešitelné. Až budeme řešit nějakou opravdu těžkou nerovnost a po tuhém boji se nám ji podaří převést například na symetrickou nerovnost dvou proměnných nízkého stupně, je nutné umět práci dokončit.

### Lineární nerovnosti

**Příklad.** Jsou dána čísla  $a, b, c$  z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Ukažte nerovnosti

$$6 \geq 3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + a + b + c \geq 1.$$

(PraSe, 28-7-6)

*Řešení.* Tuto nerovnost lze zcela jistě dokázat mnoha různými způsoby. Jeden mezi nimi ovšem vyniká jako zdaleka nejjednodušší a na rozdíl od ostatních postupů použitelný i v případě různých obměn (např. změny konstant) této úlohy.

Budeme se snažit ukázat, že zadaný výraz (označme si ho  $V(a, b, c)$ ) nabývá svých extrémů pro krajní volby proměnných  $a, b, c$ , tj. pro  $a, b, c \in \{0, 1\}$ . Zvolme si tedy  $b, c$  pevně a hledejme, pro jakou hodnotu proměnné  $a$  může výraz nabýt svého minima či maxima.

Klíčové pozorování je, že zadaný výraz je v proměnné  $a$  lineární! Skutečně, neboť když ho roznásobíme, pak zcela jistě půjde zapsat ve tvaru

$$V(a, b, c) = T(b, c) \cdot a + U(b, c),$$

kde  $T$  a  $U$  jsou nějaké výrazy složené z  $b, c$ , jejichž přesná podoba nás ani moc nezajímá. Díváme-li se ale na výraz  $V(a, b, c)$  pro pevná  $b, c$ , je  $V(a) = T \cdot a + U$  přesně tvar lineární funkce! No a o lineární funkci víme, že na uzavřeném intervalu nabývá svých extrémů v krajních bodech<sup>15</sup> (grafem je úsečka). Pro pevná  $b$  a  $c$  bude tedy výraz nabývat extrémů při volbách  $a = 0$  nebo  $a = 1$ .

<sup>15</sup>Možná jste vyzorovali, že klíčovou vlastností lineárních funkcí je v tomto případě jejich monotonie, a metodu lze tak v tomto směru zobecnit.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

Co jsme tedy vlastně ukázali? No co kdyby aspoň jedna z neznámých, řekněme  $b$ , byla různá od 0 a 1? Bylo by pak možné, aby výraz nabýval extrému pro takovou trojici? Nebylo, neboť bychom mohli zbylé dvě proměnné zafixovat a podle předchozí úvahy bychom věděli, že jediné volbou  $b = 0$  či  $b = 1$  dosáhneme při daných hodnotách  $a, c$  extrému (nebo máme vodorovnou úsečku, ale pak též stačí ověřit hodnoty v krajních bodech). Pro trojici, která nabývá extrémálních hodnot tedy opravdu musí platit  $a, b, c \in \{0, 1\}$ ! Zbývá těchto osm trojic dosadit a pohodlně určit, že minimum je skutečně 1 a maximum 6.

Celé předchozí řešení se dá vlastně zkrátit do jedné věty: *Jelikož je výraz v každé proměnné lineární, může nabývat extrému pouze v případě krajních voleb všech tří proměnných.* Pokud jste předchozí úvaze dobře porozuměli, musíte uznat, že úloha je už od pohledu nezajímavá, neboť se jedná jen o určování extrému lineární funkce.

**Cvičení.** Nalezněte minimum a maximum výrazu

$$a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a),$$

v němž  $a, b, c$  jsou z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

**Cvičení.** Pro  $x, y \in \mathbb{R}$  a  $z \in \langle -2, 2 \rangle$  ukažte nerovnost

$$x^2 + y^2 \geq xyz.$$

*Návod.* Díky linearitě v proměnné  $z$  stačí rozebrat případy  $z = \pm 2$ .

### Kvadratické nerovnosti

**Příklad.** Dokažte pro  $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y.$$

*Řešení.* (Trikové a pěkné) Nerovnost vynásobíme dvěma a upravíme na součet čtverců

$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0.$$

Hotovo.

Jak ale na něco takového přijít? A vůbec odkud se vzal ten trik s násobením dvěma? Ano, rozkládání na součet čtverců je velmi pěkná metoda dokazování nerovností, ale často není vůbec jasné, jak v úpravách postupovat. Vězte, že násobení dvěma používáme jen k tomu, aby byl rozklad lépe vidět (například člen  $2xy$  jistě popožene naši intuici více než člen  $xy$ ). To, jak poté dokončit rozklad, nám napovídají členy  $2xy, 2x, 2y$  na pravé straně.

Pokud si na rozkládání stále nevěříte, potěší vás, že existuje i jiná metoda.

*Řešení.* (Přímočaré, méně pěkné) Na nerovnost se na chvíli podíváme jako na nerovnici v proměnné  $x$  s parametrem  $y$ . Kdybychom tedy tuto nerovnici řešili, mělo by nám vyjít, že platí pro každé  $x$  bez ohledu na hodnotu parametru  $y$ . To ale jinými slovy říká, že pro

každé  $y$  má diskriminant onoho kvadratického výrazu být nekladný (parabola je celá nad osou). To můžeme snadno ověřit:

$$\begin{aligned} x^2 - x(y+1) + y^2 - y + 1 &\geq 0 \\ \Downarrow \\ D = (y+1)^2 - 4(y^2 - y + 1) &\leq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je již ekvivalentní  $-3(y-1)^2 \leq 0$ , takže diskriminant je opravdu pro každou hodnotu  $y$  nekladný a vidíme, že dokazovaná nerovnost platí.

Navíc jsme zjistili, že  $y = 1$  je pro danou nerovnost jediná kritická hodnota. Je tedy rozumné očekávat, že v rozkladu na součet čtverců se vyskytne člen  $(y-1)^2$ . Případů, v nichž výpočet diskriminantu napoví, jak sestavit rozklad na součet čtverců, je bezpočet.

Povězme si něco více o tom, jak tato metoda funguje. V předchozím odstavci jsme zjistili, že je-li nerovnost v nějaké proměnné lineární, stačí nám zkoumat pouze její krajní hodnoty. Tedy vlastně přejít (bezztrátově!) ke dvěma nerovnostem o méně proměnných. Něco podobného se děje i tu. Jen bychom si měli rozmyslet, zda je tento postup též bezztrátový. Je tomu tak, pokud dokazovaná nerovnost má platit pro **všechna** reálná čísla. Pak totiž opravdu požadujeme, aby bez ohledu na hodnotu parametrů byla příslušná parabola vždy nezáporná. Problém může nastat, jestliže máme nerovnost ukázat například pouze pro kladná  $a, b, c$ . Mohlo by se totiž stát, že třeba pro  $a = b = 1$  a  $c = -1$  nerovnost neplatí. Pokud bychom tedy zrovna počítali diskriminant vzhledem k  $c$ , mohl by nám vyjít kladný a pořád by to neznamenal, že původní nerovnost neplatí. Nicméně i v těchto případech je přechod k diskriminantu metoda nadějná a často se stává, že byť máme za úkol dokazovat nerovnost pouze pro kladná čísla, platí ve skutečnosti i pro čísla záporná.

**Cvičení.** Následující nerovnosti si zkuste dokázat oběma metodami (výpočtem diskriminantu, rozkladem na součet čtverců). Pro  $x, y \in \mathbb{R}$  ukažte

- (i)  $x^2 + y^2 + 2y + 4 \geq xy + 2x$ ,
- (ii)  $2x^2 + 2y^2 + 1 \geq x + y + 2xy$ ,
- (iii)  $(x+y)^2 + 1 \geq 2(x+y)$ .

**Cvičení.** Rozmyslete si, že pokud dokazujeme nerovnost

$$x^2 + A(y, z)x + B(y, z) \geq 0 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^+,$$

v níž  $A(y, z)$  a  $B(y, z)$  jsou nějaké výrazy v proměnných  $y, z$ , výpočtem diskriminantu a zároveň víme, že výraz  $A(y, z)$  nabývá pouze záporných hodnot, je náš postup bezztrátový.

*Návod.* Ukažte, že pro daná  $y, z$  má kvadratický trojčlen vždy minimum pro kladné  $x$ .

**Cvičení.** (Vydatné) Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2 + 2 \geq 2ab + 2bc + 2ca.$$

*Návod.* Zkuste si rozmyslet, že pokud nerovnost platí pro všechna kladná čísla, pak už nutně platí pro úplně všechna čísla. Při sestavování diskriminantu hledejte rozklady na součin. Až úlohu takto vyřešíte, zkuste ji vyřešit i rozkladem na součet čtverců.

**Poznámka.** Předchozí cvičení zároveň řeší třetí úlohu na přemýšlení z minulého dílu. Její tvar získáte po substituci  $a = \sqrt{x-1}$ ,  $b = \sqrt{y-1}$ ,  $c = \sqrt{z-1}$ .

### Nerovnosti jedné proměnné

Velmi často se nám bude při řešení stávat, že poslední krok v našem postupu bude důkaz nerovnosti jedné proměnné. Pojďme si tedy o takových nerovnostech něco říci. Máme na ně dvě základní zbraně: AG nerovnost a rozklad na součín.

**Příklad.** Pro  $x \in \mathbb{R}^+$  ukažte

$$8x^3 + x^2 - 8x + 3 \geq 0.$$

*Řešení.* Nerovnost získáme sečtením AG nerovností

$$x^2 + 1 \geq 2x, \quad 8x^3 + 1 + 1 \geq 3 \cdot 2x.$$

Toto řešení sice nevypadá moc přirozeně, ale jeho jedinou myšlenkou je pomocí členů s kladným koeficientem odhadnout členy se záporným koeficientem. Při použití AG nerovnosti pro tři prvky je podstatné, že  $x$  je kladné číslo. Pokud by  $x$  bylo pouze reálné, druhý odhad bychom použít nemohli (pozor na to!) a nerovnost by dokonce neplatila, zkuste si schválně dosadit  $x = -10$ .

**Příklad.** Pro  $x \in \mathbb{R}$  ukažte

$$x^4 - x^2 - 2x + 2 \geq 0.$$

*Řešení.* Polynom rozložíme na součín

$$x^4 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 2x + 2) = (x-1)^2 \cdot ((x+1)^2 + 1) \geq 0.$$

A důkaz je hotov.

I toto řešení jistě vyžaduje komentář. Ve skutečnosti jsme postupovali následovně. Všimli jsme si, že pro  $x = 1$  nastává rovnost. To bude mimochodem velmi typický případ. Jednička je tedy kořenem polynomu a člen  $(x-1)$  z něj musí jít vytknout.<sup>16</sup> Při vytýkání je naší jedinou strategií rozdělit výraz na menší skupinky tak, abychom člen  $(x-1)$  uměli vytknout z každé z nich. Píšme tedy

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 - 2x + 2 &= (x^4 - x^2) - (2x - 2) = (x-1) \cdot (x^3 + x^2) - 2(x-1) = \\ &= (x-1) \cdot (x^3 + x^2 - 2). \end{aligned}$$

Nyní vidíme, že pro  $x = 1$  je i poslední závorka nulová. Vytýkejme<sup>17</sup>  $(x-1)$  znovu

$$(x-1) \cdot (x^3 + x^2 - 2) = (x-1) \cdot ((x^3 - 1) + (x^2 - 1)) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 2x + 2).$$

<sup>16</sup>Pokud se v polynomech vůbec neorientujete, můžete si přečíst krátký studijní text na <http://mks.mff.cuni.cz/archive/28/3.pdf>.

<sup>17</sup>Pokud nemáte rádi vytýkání, můžete použít i dělení polynomu polynomem. Budeme ovšem radši, když se vám podaří odpozorovat, jak se vytýká, není to nic těžkého.



Nyní zbývá ukázat, že  $x^2 + 2x + 2 \geq 0$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ , což nečiní žádný problém.

**Poznámka.** (O dvojném kořenu – důležitá!) Na tento výsledek se budeme často odvolávat, a tak doporučujeme jej důkladně vstřebat. Představme si, že dokazujeme  $P(x) \geq 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  a nějaký polynom  $P(x)$ . Odhalíme, že lze vytknout třeba  $(x - 5)$ , a píšeme  $P(x) = (x - 5)Q(x)$ , kde  $Q(x)$  je opět nějaký polynom. Všimneme si, že člen  $(x - 5)$  mění v bodě 5 své znaménko. Znaménko celého součinu má být ale stále kladné, proto i polynom  $Q(x)$  musí v bodě 5 měnit znaménko. To ale neznamená nic jiného, než že číslo 5 je kořenem polynomu  $Q(x)$  a že i z něj lze vytknout  $(x - 5)$ . Touto jednoduchou úvahou jsme odvodili, že pokud v nějakém bodě platí rovnost, chceme příslušný kořenový činitel vytknout hned ve druhé mocnině! Pokud by to nešlo, nemohla by dokazovaná nerovnost platit. Samozřejmě dokazujeme-li onu nerovnost jen pro  $x \in \mathbb{R}^+$ , pak nás zajímají pouze ty případy rovnosti, v nichž je  $x$  kladné.

**Cvičení.** Pro  $x \in \mathbb{R}^+$  dokažte

- (i)  $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 \geq 0$ ,
- (ii)  $x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ,
- (iii)  $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$ .

**Cvičení.** Pro  $x \in \mathbb{R}$  dokažte

- (i)  $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ,
- (ii)  $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \geq 0$ ,
- (iii)  $x^6 - 4x^5 + 8x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1 \geq 0$ .

## Nerovnosti dvou proměnných

Pro nerovnosti dvou proměnných můžeme kromě obvyklých postupů použít i dvě nové techniky. Jedna z nich se hodí pro nerovnosti homogenní a druhá pro symetrické.

**Příklad.** Pro  $a, b > 0$  ukažte

$$a^4 + 2b^4 \geq a^2b^2 + 2ab^3.$$

*Řešení.* Nerovnost je homogenní, zvolme tedy  $b = 1$ . Podle příkladu z předchozího odstavce víme, že

$$a^4 - a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 \cdot ((a + 1)^2 + 1) \geq 0.$$

A nerovnost je dokázaná.

Vidíme tedy, že homogenní nerovnosti dvou proměnných lze (bezztrátově) převádět na nerovnosti jedné proměnné, které již umíme pohodlně řešit.

**Cvičení.** Ukažte, že z každé platné homogenní nerovnosti v proměnných  $a, b$ , v níž rovnost nastává pro  $a = b$ , lze vytknout člen  $(a - b)^2$ .

**Příklad.** Pro kladná čísla  $a, b$  ukažte nerovnost

$$a^2(a + 1) + b^2(b + 1) + 1 \geq 5ab.$$

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

*Řešení.* Všimneme si, že nerovnost je symetrická. Zvolíme substituci  $s = a + b$ ,  $p = ab$  a dokazovanou nerovnost přepíšeme do nových proměnných  $s$  a  $p$ :

$$\begin{aligned} (a^3 + b^3) + (a^2 + b^2) + 1 &\geq 5ab \\ \Updownarrow \\ s(s^2 - 3p) + (s^2 - 2p) + 1 &\geq 5p. \end{aligned}$$

Všimneme si, že nerovnost je v proměnné  $p$  lineární, stačí ji tedy ověřit pro krajní hodnoty  $p$ . Pro pevnou hodnotu  $s$  se  $p$  pohybuje v intervalu  $(0, s^2/4)$ . Kromě nezápornosti čísel  $a, b$  jsme využili odhad  $(a+b)^2 \geq 4ab$ . V případě  $p = 0$  je jedno z čísel  $a, b$  nulové, což ze zadání nelze (ale mimochodem nerovnost rovněž triviálně platí). V případě  $4p = s^2$  je nerovnost (jedné proměnné) ekvivalentní nerovnosti  $(s+1)(s-2)^2 \geq 0$ . Důkaz je hotov.

Ano, tušíte správně, že představovanou metodou je *symetrická substituce*, tedy substituce  $s = x + y$  ( $s$  z anglického *sum*),  $p = xy$  ( $p$  z anglického *product*). Po převedení do proměnných  $p$  a  $s$  jsme využili toho, že nerovnost byla v proměnné  $p$  lineární, což se ovšem nemusí stát vždy. Postup je schůdný i v případě, že nerovnost je v  $p$  kvadratická. V tom případě můžeme buď sáhnout po výpočtu diskriminantu, nebo třeba zkusit ukázat, že ona kvadratická funkce je v intervalu vymezeném pro  $p$  rostoucí. Pak by opět bylo jasné, kde nabývá extrému. Jestliže je nerovnost v  $p$  ještě vyššího stupně, pak naší jedinou nadějí je vytýkání. Pokud například rovnost nastává kdykoliv  $x = y$ , pak po symetrické substituci **musí** jít vytknout člen  $s^2 - 4p = (x - y)^2$ .

**Cvičení.** Ukažte, že pro každé  $n$  lze výraz  $x^n + y^n$  zapsat pomocí  $s$  a  $p$ .

*Návod.* Uvažte nejmenší  $n$ , pro něž výraz pomocí  $s$  a  $p$  zapsat nelze, a spor hledejte ve výrazu  $x^n + y^n - (x + y)^n$ .

**Cvičení.** Pro  $x, y \in \mathbb{R}$  ukažte  $x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 \geq 0$ .

**Cvičení.** Pro  $x, y \in \mathbb{R}^+$  ukažte

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}.$$

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c, d$  platí  $abcd = 1$ . Ukažte nerovnost

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

(Čína 2004)

*Návod.* Dvakrát použijte výsledek předchozího cvičení.

**Cvičení.** (Hodně počítací) Pro  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $x, y, z \neq 1$ , jejichž součin je roven 1 ukažte nerovnost

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

(IMO 2008)

*Návod.* Dosadte  $z = \frac{1}{xy}$ , použijte symetrickou substituci, zatněte zuby a počítejte. Diskriminant výsledné kvadratické rovnice by měl vyjít 0.

### Symetrické homogenní nerovnosti tří proměnných

Na tuto třídu nerovností máme též jednu bezztrátovou metodu, která je ovšem, jak za okamžik uvidíte, výpočetně únosná jen pro nerovnosti nízkých stupňů.

**Příklad.** (1. úloha na přemýšlení z minulého dílu) Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte nerovnost

$$(a - b)^2(a + b - c) + (b - c)^2(b + c - a) + (c - a)^2(c + a - b) \geq 0.$$

*Řešení.* Nerovnost je symetrická, bez újmy na obecnosti tedy zvolme  $a \geq b \geq c$ . Dále vidíme, že nerovnost je homogenní, proto můžeme položit  $c = 1$  a psát  $b = 1 + x$ , kde  $x \geq 0$ , a  $a = 1 + x + y$ , kde  $y \geq 0$ . Tím bezztrátově přejdeme k nerovnosti dvou proměnných

$$y^2(1 + 2x + y) + x^2(1 - y) + (x + y)^2(1 + y) \geq 0,$$

z jejíž levé strany po úpravě jistě „zmizí“ jediný záporný člen  $x^2y$ , takže ji můžeme prohlásit za platnou.

**Poznámka.** Občas se používá i substituce  $c = 1$ ,  $b = 1 + x$ ,  $a = 1 + y$ , kde  $x, y \geq 0$ . Její výhodou je, že vzniklá nerovnost dvou proměnných je symetrická, nevýhodou naopak to, že je často pracnější. Například u cyklických nerovností ani na výběr nemáme, neboť bůno<sup>18</sup> můžeme prohlásit pouze  $a \geq c$ ,  $b \geq c$ .

**Cvičení.** Dokažte tímto způsobem Schurovu nerovnost pro  $k = 2$

$$a^2(a - b)(a - c) + b^2(b - c)(b - a) + c^2(c - a)(c - b) \geq 0$$

platnou pro  $a, b, c \geq 0$ .

*Návod.* Nezapomeňte zvláště vyšetřit případ  $c = 0$  (je to totiž jeden z případů rovnosti) a rozmyslete si, že pouze pro  $a, b, c > 0$  lze bůno volit  $c = 1$ .

**Cvičení.** (Na algebraickou představivost) Zkuste stejným způsobem dokázat Schurovu nerovnost pro obecné  $k \in \mathbb{N}$ .

**Cvičení.** (Mildorfova nerovnost) Nechť  $a, b, c$  jsou reálná čísla splňující  $a \geq b \geq c$  a  $x, y, z$  nezáporná čísla, pro něž platí  $x + z \geq y$ . Ukažte, že platí

$$x^2(a - b)(a - c) + y^2(b - c)(b - a) + z^2(c - a)(c - b) \geq 0,$$

a určete, kdy nastává rovnost.

*Návod.* Záporné členy tentokrát odstraňte pomocí AG nerovnosti s využitím druhé mocniny vztahu  $x + z \geq y$ .

<sup>18</sup>Bez újmy na obecnosti.

## Rozděl a panuj

Často je možné dokazovanou nerovnost rozdělit na součet několika jednodušších nerovností (vzpomeňte na AG mašinku). Třeba v následujícím příkladu:

**Příklad.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte nerovnost

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq 3(a + b + c).$$

*Řešení.* Nerovnost získáme sečtením tří analogických AG nerovností

$$a^3 + 1 + 1 \geq 3a, \quad b^3 + 1 + 1 \geq 3b, \quad c^3 + 1 + 1 \geq 3c.$$

Úloha je vyřešena.

Výhodou této techniky je, že ony dílčí nerovnosti, z nichž tu dokazovanou skládáme, mají zpravidla méně proměnných a všeobecně mají jednodušší tvar a snadno se dokážou. Nevýhod je na druhou stranu hned několik. Samozřejmě se jedná o metodu ztrátovou, jelikož nemáme jistotu, že jsme původní nerovnost rozdělili správně, tedy na platné nerovnosti. Dále je třeba říct, že většinou existuje více způsobů, jak rozdělovat (tedy více možných dílčích nerovností) a zdaleka ne všechny dílčí nerovnosti budou platit. A konečně je třeba přiznat, že též velmi často nerovnost tímto způsobem rozdělit prostě nelze. Přes to všechno pokud nerovnost rozdělit lze, tak by nám to nemělo uniknout a pár rozkladů je dobré vždy vyzkoušet.

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $x, y, z$  ukažte nerovnost

$$\frac{2}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+y)^2} + \frac{2}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx}.$$

**Cvičení.** Ukažte, že pro  $a, b, c > 0$  platí

$$\frac{2}{3}(a + b + c) \geq \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1.$$

*Návod.*  $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ .

## O síle odhadů

Příklad, který si nyní ukážeme, velmi pěkně ilustruje, jak i úplně jednoduchý odhad může vyřešit těžkou úlohu.

**Příklad.** Ukažte, že pro všechny trojice kladných čísel  $a, b, c$  platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

(USAMO 1998)

*Řešení.* Víme, že pro  $x, y \in \mathbb{R}^+$  platí  $x^3 + y^3 \geq x^2y + y^2x$  (AG mašinka), a můžeme tedy psát

$$L \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2b + b^2a + abc} = \sum_{\text{cyc}} \frac{c}{abc(a + b + c)} = \frac{1}{abc},$$

čímž nerovnost dokážeme. Pozorně si rozmyslete, že v prvním odhadu skutečně platí znaménko  $\leq$ .

Vidíte, že v tomto příkladu nám odhad jedné části výrazu úlohu v podstatě vyřešil. Připravte se ovšem na to, že nesrovnatelně častější je případ, kdy po použití nějakého odhadu zbyde k důkazu nerovnost, která neplatí. Nerovnosti pak můžeme dělit na *silné* a *slabé* podle toho, jak odolné jsou vůči různým odhadům, tedy vlastně jak těsný je vztah mezi levou a pravou stranou. Obdobně můžeme ohodnotit i sílu metod, které k vytváření odhadů používáme. Porovnávat obecně sílu známých nerovností je velmi těžké (zvláště když jsou mezi nimi často těsné vztahy), nicméně například CS zlomkobijec je nepochybně metoda silná, naopak odhad z předchozího příkladu je spíše slabý. Získat dobrou představu o síle různých odhadů vyžaduje docela velkou praxi, a tak nám zatím budete muset spíš věřit, když řekneme, že nějaký odhad je silný.

**Cvičení.** Ukažte, že pro kladná čísla  $a, b, c$  splňující  $abc = 1$  platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq 1.$$

(IMO shortlist 1996)

*Návod.* Použijte odhad  $a^5 + b^5 \geq a^2b^2(a + b)$ .

Permutační nerovnost<sup>19</sup>

Někdy se jí též říká mincová nerovnost a soukromě ji nazýváme finančníková nerovnost, protože ji bez důkazu pochopí každý finančník. V jistém smyslu se jedná o zatím nejobecnější nerovnost, protože jak Cauchyho nerovnost (CS), tak i AG nerovnost jsou jejími důsledky.<sup>20</sup> Možná se vám zdá divné, že jsme dosud tak propagovali AG a CS. Důvody jsou dva. Zaprvé, umět dobře používat AG a CS je pro řešení netriviálních nerovností naprosto nezbytné. Druhý důvod je ten, že v některých úlohách je použití AG či CS prostě více intuitivní (a samozřejmě jsou i případy, kdy je tomu naopak).

**Tvrzení.** (Permutační nerovnost) *Mějme dvě uspořádané posloupnosti libovolných<sup>21</sup> reálných čísel  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  a  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pro libovolnou permutaci  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  čísel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  platí*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \geq x'_1y_1 + x'_2y_2 + \dots + x'_ny_n \geq x_ny_1 + x_{n-1}y_2 + \dots + x_1y_n.$$

Ještě než tvrzení dokážeme, chtěli bychom naznačit, že si svůj důkaz vlastně skoro ani nezaslouží, protože je opravdu zřejmé, když se formuluje následujícím finančním způsobem (například pro  $n = 3$ ). Ocitli jsme se ve finančním poloráji, kde je obrovská hromada tisícikorun, vedle ní hromada pětisetkorun a vedle ještě hromada stokorun ( $y_1 = 1000$ ,  $y_2 = 500$ ,  $y_3 = 100$ ). Peníze si můžeme vzít jen ve třech krocích. V každém kroku si nejdříve určíme hromadu, ze které chceme bankovky odebírat. V prvním kroku si potom smíme z vybrané hromady odebrat sedm bankovek a poté celá hromada zmizí. V druhém kroku si z další vybrané hromady můžeme odebrat už jen pět bankovek a hromada zmizí. Ve třetím kroku si ze zbylé hromady můžeme vybrat tři bankovky ( $x_1 = 7$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 3$ ) a s jejím zmizením se z poloráje definitivně stane polopeklo. Jak hromady vybírat, abychom si odnesli co nejvíce peněz? No to je jasné, přece  $7 \cdot 1000 + 5 \cdot 500 + 3 \cdot 100$ . A jak vybírat hromady pro nepřítele, aby si odnesl co nejméně? No přece  $3 \cdot 1000 + 5 \cdot 500 + 7 \cdot 100$ . Všechny ostatní výběry dají částku někde mezi.

Právě ukázaná formulace je důvodem, proč se této nerovnosti někdy říká i *mincová nerovnost* (místo bankovek se berou mince). Zkusme si i formální důkaz. Jeho myšlenka je velmi jednoduchá, prostě prohazujeme „špatně uspořádané“ dvojice. Budeme říkat, že  $n$ -tici  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  přísluší součet  $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ .

*Důkaz.* Dokazujme nejdříve první nerovnost. Předpokládejme, že  $n$ -tice  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  se liší od  $n$ -tice  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  poprvé na pozici  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , tj.  $x_i \neq x'_i$ . Pak ale

<sup>19</sup> Anglický název je *rearrangement inequality*.

<sup>20</sup> Pokud jste se již setkali s nerovnostmi mezi mocninnými průměry (harmonickým, geometrickým, aritmetickým a kvadratickým), pak vezte, že i tyto nerovnosti lze dokázat pomocí permutační nerovnosti.

<sup>21</sup> Pripouštíme i záporná.

jistě existuje  $j > i$  takové, že  $x'_j = x_i \geq x'_i$  (případ  $j < i$  nastat nemůže, protože pro každé  $k < i$  platí  $x_k = x'_k$ ). Místo staré  $n$ -tice  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots, x'_j = x_i, \dots, x'_n)$  vezměme novou  $n$ -tici  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_j = x_i, \dots, x'_i, \dots, x'_n)$ , kde  $x'_i$  je na  $j$ -té pozici (prohodili jsme jen  $x'_i, x'_j$ ). Stačí porovnat starý součet  $\sum_{i=1}^n x'_i y_i$  s novým součtem příslušným nové  $n$ -tici. Ty se však liší jen ve dvou sčítancích a pozorujeme, že

$$x'_j y_i + x'_i y_j \geq x'_i y_i + x'_j y_j \quad \Leftrightarrow \quad (x'_j - x'_i)(y_i - y_j) = (x_i - x'_i)(y_i - y_j) \geq 0,$$

což je součin dvou nezáporných čísel, takže nový součet je větší nebo roven starému. Z toho už plyne, že součet  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$  příslušející  $n$ -tici  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je největší možný.

Druhá nerovnost se dokáže zcela analogicky. Můžeme ji ale dokázat i z první nerovnosti, a to tak, že vezmeme posloupnost  $-y_n \geq -y_{n-1} \geq \dots \geq -y_1$ . Potom víme, že součet  $-x_1 y_n - x_2 y_{n-1} - \dots - x_n y_1$  je největší možný, tedy součet  $x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1$  je naopak nejmenší možný.

### Jak to použít?

Ukážeme si několik příkladů, na kterých tě snad přesvědčíme, že snažit se hledat v úlohách permutační nerovnost může být opravdu velmi užitečné, elegantní a rychlé.

**Poznámka.** Budeme říkat, že dvě  $n$ -tice  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  jsou souhlasně uspořádané, pokud existuje permutace  $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  taková, že  $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}$  a zároveň  $y_{\sigma(1)} \geq y_{\sigma(2)} \geq \dots \geq y_{\sigma(n)}$  (jedna permutace uspořádá obě posloupnosti). Naopak budeme říkat, že tyto  $n$ -tice jsou opačně uspořádané, pokud existuje permutace  $\sigma$  taková, že  $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}$  a zároveň  $y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \dots \leq y_{\sigma(n)}$ . Zjednodušeně lze říci, že dvě  $n$ -tice jsou souhlasně uspořádané, jestliže párujeme velká čísla s velkými a malá s malými (tedy tím nejlepším způsobem), a naopak opačně uspořádané, párujeme-li tím nejhorším způsobem.

Pro libovolné  $n$ -tice  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$  a libovolnou permutaci  $\sigma$  budeme výraz  $\sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)}$  nazývat součinem těchto  $n$ -tic (příslušným permutaci  $\sigma$ ). Pro uspořádané posloupnosti  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  a  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$  budeme o výrazu  $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  mluvit jako o maximálním součinu těchto posloupností a o výrazu  $x_1 y_n + \dots + x_n y_1$  jako o minimálním součinu těchto posloupností. Jsou-li  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$  souhlasně uspořádané, je  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$  jejich maximální součin, a jsou-li opačně uspořádané, je  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$  jejich minimální součin.

V minulém dílu seriálu jsme si pomocí AG mašinky dokazovali následující nerovnosti (jen (iv) jsme si dovolili přidat):

**Příklad.** Pro kladná  $x, y, z$ , resp. kladná  $a, b, c$  dokažte

- (i)  $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$ ,
- (ii)  $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 y + y^2 z + z^2 x$ ,
- (iii)  $x^3 y + y^3 z + z^3 x \geq x^2 y z + y^2 z x + z^2 x y$ ,
- (iv)  $x^4 y^2 + y^4 z^2 + z^4 x^2 \geq x^3 y z^2 + y^3 z x^2 + z^3 x y^2$ ,
- (v)  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ ,
- (vi)  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$ .

*Řešení.* Všechny nerovnosti umíme snadno dokázat pomocí AG, ale teď se na ně podíváme z trochu jiného úhlu.

- (i) Trojice  $(x, y, z)$ ,  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$  jsou opačně uspořádané<sup>22</sup> (zde využíváme, že čísla jsou kladná). Na pravé straně dokazované nerovnosti je jejich minimální součin, totiž  $3 = x\frac{1}{x} + y\frac{1}{y} + z\frac{1}{z}$ , zatímco na levé je jejich jiný součin. Takže nerovnost plyne ihned z permutační nerovnosti.
- (ii) Trojice  $(x, y, z)$ ,  $(x^2, y^2, z^2)$  jsou souhlasně uspořádané a na levé straně dokazované nerovnosti je jejich maximální součin, takže nerovnost plyne z permutační nerovnosti.
- (iii) Trojice  $(x^2, y^2, z^2)$ ,  $(yz, zx, xy)$  jsou opačně uspořádané<sup>23</sup> a na pravé straně je jejich minimální součin, takže díky permutační nerovnosti jsme hotovi.
- (iv) Trojice  $(x^2y, y^2z, z^2x)$ ,  $(x^2y, y^2z, z^2x)$  jsou souhlasně uspořádané. Na levé straně je jejich maximální součin a na pravé straně jiný součin.
- (v) Trojice  $(a^2, b^2, c^2)$ ,  $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$  jsou opačně uspořádané a na pravé straně nerovnosti je jejich minimální součin, zatímco na levé straně je jiný součin.
- (vi) Trojice  $(a^3, b^3, c^3)$  a  $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$  jsou opačně uspořádané a podle permutační nerovnosti proto platí  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2$ . Nerovnost  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  ovšem platí také (už ji známe), protože na levé straně je maximální součin trojic  $(a, b, c)$ ,  $(a, b, c)$ .

### Zkuste to sami, je to snadné!

Stačí jen přejíždět zrakem a ověřovat, že některé nerovnosti jsou vlastně opravdu vidět :).

**Cvičení.** Nechť jsou dána libovolná reálná čísla  $a_1, \dots, a_n$  a  $a'_1, \dots, a'_n$  je jejich libovolná permutace. Dokažte, že

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1a'_1 + a_2a'_2 + \dots + a_na'_n.$$

**Cvičení.** Nechť  $a_1, \dots, a_n$  jsou kladná reálná čísla a  $a'_1, \dots, a'_n$  je jejich libovolná permutace. Dokažte, že

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \dots + \frac{a_n}{a'_n} \geq n.$$

**Cvičení.** Pro  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a přirozené  $k < n$  dokažte

- (i)  $x^7 + y^7 + z^7 \geq x^5y^2 + y^5z^2 + z^5x^2$ ,
- (ii)  $x^n + y^n + z^n \geq x^k y^{n-k} + y^k z^{n-k} + z^k x^{n-k}$ .

**Cvičení.** (o něco málo těžší) Nechť  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  a  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$  jsou reálná čísla a necht'  $(y'_1, \dots, y'_n)$  je permutace  $(y_1, \dots, y_n)$ . Dokažte, že

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - y'_1)^2 + (x_2 - y'_2)^2 + \dots + (x_n - y'_n)^2.$$

<sup>22</sup>Platí pro jakékoli uspořádání čísel  $x, y, z$ . Zkuste si.

<sup>23</sup>Tuto skutečnost je vždy dobré si podrobně rozmyslet. Precizní zdůvodnění je takové, že je-li  $x \geq y \geq z$ , pak je  $x^2 \geq y^2 \geq z^2$  a  $yz \leq zx \leq xy$ . Je-li  $x \geq z \geq y$ , pak je  $x^2 \geq y^2 \geq z^2$  a  $yz \leq xy \leq zx$  a jiná uspořádání vzhledem k cykličnosti diskutovat nemusíme (bez újmy na obecnosti je  $x$  největší).



**Cvičení.** Pro kladná  $a, b, c$  dokažte

$$\frac{b+1}{a\sqrt{a}} + \frac{c+1}{b\sqrt{b}} + \frac{a+1}{c\sqrt{c}} \geq 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

*Návod.* Začněte jednoduchoučkým AG.

### Sčítání je mocné

Tím ovšem plejáda pěkných použití permutační nerovnosti zdaleka nekončí. Podívejme se třeba na tzv. *Nesbittovu nerovnost*, kterou jsme v minulém dílu dokázali pomocí CS zlomkobijce.

**Příklad.** Pro kladná  $a, b, c$  dokažte

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

*Řešení.* Trojice  $(a, b, c)$ ,  $(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b})$  jsou souhlasně uspořádané (rozmyslete si), takže z permutační nerovnosti plyne

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}, \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}. \end{aligned}$$

Sečtením a vydělením dvěma dostaneme dokazovanou nerovnost.

Jak jsme právě mohli vidět, sčítání různých dolních odhadů maximálního součinu bylo cestou k cíli. I v mnoha jiných úlohách je sčítání několika nerovností (podobně jako u AG) účinnou zbraní. Vyzkoušejte si tuto techniku sami.

**Příklad.** Nechť  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ . Označme  $s = a_1 + \dots + a_n$ . Dokažte, že platí

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \dots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

*Návod.*  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $(\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \dots, \frac{1}{s-a_n})$  jsou souhlasně uspořádané. Napište pod sebe všech  $n-1$  cyklicky vytvořených odhadů a hádejte, co se s nimi dá udělat.

**Cvičení.** (Čebyševova nerovnost) Nechť  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  a  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ . Potom platí

$$\begin{aligned} n(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) &\geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \geq \\ &\geq n(x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1). \end{aligned}$$

**Poznámka.** Čebyševovu nerovnost lze chápat i tak, že pro maximální součin platí odhad

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) y_i.$$

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

**Cvičení.** Pro kladná  $a, b, c$  a  $n \geq 1$  dokažte

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{c+a} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

*Návod.*  $(a, b, c), \left(\frac{a^{n-1}}{b+c}, \frac{b^{n-1}}{c+a}, \frac{c^{n-1}}{c+a}\right)$  jsou souhlasně uspořádané.

## Jensenova nerovnost

Abychom pochopili Jensenovu<sup>24</sup> nerovnost, je potřeba nejdříve dobře porozumět pojmům konvexní kombinace a konvexní funkce. Dejte si něco dobrého na zub a vrhneme se na to.

### Konvexní kombinace

**Definice.** Nechť jsou dána reálná čísla  $x_1, \dots, x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Nechť jsou dále  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$  taková, že  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ . Číslo

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

nazýváme *konvexní kombinací* čísel  $x_1, \dots, x_n$ .

**Cvičení.** Ukažte, že každé z čísel  $x_i$  lze zapsat jako konvexní kombinaci čísel  $x_1, \dots, x_n$ .

**Cvičení.** Rozmyslete si, že pokud je  $x_1$  nejmenší z kombinovaných čísel a  $x_n$  naopak největší, pak všechny konvexní kombinace čísel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  leží v intervalu  $\langle x_1, x_n \rangle$ .

**Cvičení.** Ukažte, že každé číslo z tohoto intervalu lze vyjádřit pomocí nějaké konvexní kombinace.

Zatím jsme se zabývali konvexními kombinacemi na přímcce. Pro pochopení Jensenovy nerovnosti je ale klíčové porozumět tomu, jak se chovají konvexní kombinace v rovině.

**Definice.** Nechť  $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$  jsou body v rovině a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$  reálná čísla taková, že  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Potom bod v rovině

$$[\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n]$$

nazýváme *konvexní kombinací* bodů  $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$ .

Nyní si pomocí několika snadných cvičení rozmyslíme, jak vypadá množina všech konvexních kombinací (pro daných  $n$  bodů v rovině).

**Cvičení.** Pro  $n = 2$  je onou množinou úsečka spojující body  $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ .

**Cvičení.** Pro  $n = 3$  je množinou všech konvexních kombinací bodů  $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$  trojúhelník přesně s těmito vrcholy.

*Návod.* Ukažte, že umíte dosáhnout každého bodu na obvodu. Pak stačí ukázat, že s každými dvěma body leží v hledané množině i celá úsečka, která je spojuje. Nakonec si

<sup>24</sup>Johan Jensen (1859–1925) byl dánský matematik.

rozmyslete, že naopak i jakákoliv konvexní kombinace leží uvnitř trojúhelníku, protože ji lze chápat jako „postupné skládání“ dvou konvexních kombinací, totiž

$$\begin{aligned} \lambda_1[x_1, y_1] + \lambda_2[x_2, y_2] + \lambda_3[x_3, y_3] &= \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}[x_1, y_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}[x_2, y_2] \right) + \lambda_3[x_3, y_3]. \end{aligned}$$

**Cvičení.** Pro obecné  $n$  je množinou všech konvexních kombinací bodů  $x_1, x_2, \dots, x_n$  konvexní  $k$ -úhelník ( $k \leq n$ ), jehož vrcholy tvoří jen zadané body a uvnitř něhož leží zbývajících  $n - k$  bodů. Tomuto  $k$ -úhelníku se říká konvexní obal daných bodů.

*Návod.* Zobecněte předchozí úvahy.

### Konvexní a konkávní funkce

Jednu nepříjemnost máme za sebou, pochopili jsme, co to je konvexní kombinace a jaké má vlastnosti. Tím už máme prakticky vyhráno. Nevěříte? Čtete dále.

**Definice.** Necht'  $I \subset \mathbb{R}$  je interval a necht'  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce. Pokud pro každou dvojici  $x, y \in I$  a každé  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

nazveme funkci  $f$  *konvexní* na intervalu  $I$ .

V případě, že je splněná dokonce ostrá nerovnost (pro každé  $\lambda \in (0, 1)$ ), mluvíme o *ryze konvexní* funkci.

V případě, že pro každou dvojici  $x, y \in I$  a každé  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  platí opačná nerovnost (tedy  $\geq$ ), nazveme funkci  $f$  *konkávní* na intervalu  $I$ , a podobně platí-li dokonce ostrá nerovnost, mluvíme o *ryze konkávní* funkci.

Definice konvexní funkce tedy říká, že pro libovolné dva body  $x, y$  musí být příslušná část grafu funkce (tím myslíme množinu  $\{[t, f(t)] \in \mathbb{R}^2; x \leq t \leq y\}$ ) pod úsečkou spojující body  $[x, f(x)], [y, f(y)]$  a v případě konkávní funkce musí být nad ní. Abychom viděli, že už máme opravdu vše potřebné za sebou, ukážeme si přímo Jensenovu nerovnost.

**Tvrzení.** (Jensenova nerovnost) *Necht'  $f$  je konvexní funkce na intervalu  $I$ . Potom pro libovolná  $x_1, \dots, x_n \in I$  a libovolná  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$  taková, že  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  platí*

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

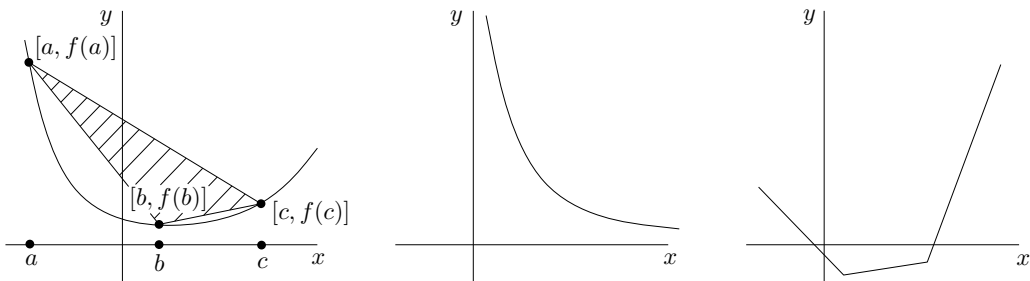
Vidíme, že Jensenova nerovnost je jen jakási „zobecněná definice“ konvexní funkce a že nehovoří o ničem jiném, než právě o konvexních kombinacích. Uvažujeme-li graf funkce  $f$  (tj. množinu bodů  $\{[t, f(t)] \in \mathbb{R}^2; t \in I\}$ ), potom bod  $[\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)]$  leží na grafu funkce, zatímco bod  $[\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)]$  leží uvnitř konvexního  $n$ -úhelníku tvořeného vrcholy  $[x_i, f(x_i)], i \in \{1, \dots, n\}$ . Přitom ale oba zmíněné body leží „nad sebou“ (mají stejné  $x$ -ové souřadnice  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ ). Odtud je ihned patrné, že Jensenova nerovnost platí! Přesto si uvedeme velice stručný formální důkaz.

*Důkaz.* Postupujeme indukcí. Pro  $n = 2$  se jedná o definici konvexní funkce. Předpokládejme, že tvrzení platí pro  $n$  a dokážeme jej pro  $n + 1$ . První nerovnost plyne z konvexity funkce  $f$  a druhá z indukčního předpokladu.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) &= \\ &= f\left((1 - \lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leq \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

**Poznámka.** (o rovnosti) Asi ve všech našich aplikacích budeme Jensenovu nerovnost používat na ryze konvexní nebo ryze konkávní funkce a se všemi koeficienty  $\lambda_i$  nenulovými. V takovém případě leží konvexní kombinace  $[\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)]$  přímo uvnitř konvexního  $n$ -úhelníku tvořeného body  $[x_1, f(x_1)], \dots, [x_n, f(x_n)]$  a v Jensenově nerovnosti proto platí ostrá nerovnost – vyjma jednoho jediného případu, kdy jsou si všechna  $x_i$  rovna (a  $n$ -úhelník degeneruje do jediného bodu).

Abychom mohli Jensenovu nerovnost dobře používat, je nutné umět poznat, které funkce jsou konvexní. Ukažme si nejdříve nějaké příklady konvexních funkcí (na prvním obrázku je navíc Jensenova nerovnost znázorněna graficky pro tři čísla).



Poznat o zadané funkci, že je konvexní, nemusí být zcela triviální. Jedna z metod je použít derivaci. Nebudeme se zabývat tím, co derivace je, jenom bez důkazu uvedeme, že pokud má funkce  $f$  druhou derivaci, pak je  $f$  konvexní na intervalu  $I$ , právě když její druhá derivace je na  $I$  nezáporná ( $f$  ale vůbec druhou derivaci mít nemusí, a přesto může být konvexní). Obdobné tvrzení platí samozřejmě i pro konkávní funkce. Hodně laicky se dá říci, že konvexní funkce jsou ve tvaru „misky“, zatímco konkávní mají tvar „deštníku“. Častokrát pomůže umět si představit průběh funkce.<sup>25</sup> V seriálu obvykle budeme bez ověřování definice tvrdit, že funkce je konvexní.<sup>26</sup>

Jensenova nerovnost má samozřejmě svoji obdobu pro konkávní funkce, ovšem tentokrát ve tvaru

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n),$$

pro  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$  taková, že  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ .

<sup>25</sup>Ve složitějších případech si můžete funkci nechat vykreslit na počítači. Doporučujeme uživatelsky přátelskou online aplikaci *function plotter* na <http://www.univie.ac.at/future.media/moe/fplotter/fplotter.html>.

<sup>26</sup>To by mělo projít bez důkazu i v olympiádě, pokud se nepracuje zrovna s nějakou divokou funkcí. O jednoduchých funkcích se považuje za známé, zda jsou konvexní, nebo ne.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

Určitě už se těšíte na všechny možné nerovnosti, které se nám pomocí Jensenovy nerovnosti podaří dokázat. Ještě předtím ale zkusíme uvést skromný výčet nejpoužívanějších konvexních a konkávních funkcí. Vždy uvedeme i příslušný interval, na němž funkce má danou vlastnost.

konvexní	na intervalu	konkávní	na intervalu
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^-$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$
$x^2, x^4, \dots$	$\mathbb{R}$	$x^3, x^5, \dots$	$\mathbb{R}^-$
$\sin x$	$(\pi, 2\pi)$	$\sin x$	$(0, \pi)$
$\cos x$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$	$\cos x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{tg} x$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\operatorname{tg} x$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$\ln x$	$\mathbb{R}^+$

O spoustě dalších funkcí není obtížné rozhodnout, zda jsou konvexní či konkávní (například lineární lomená funkce  $\frac{ax+b}{cx+d}$ , polynomy, atd.), je ovšem vždy potřeba dávat si pozor na intervaly. Rádi bychom upozornili, že součet konvexních funkcí je konvexní funkce, kladný násobek konvexní funkce dá konvexní funkci, ovšem o součinu dvou konvexních funkcí již nic podobného obecně tvrdit nelze.

### Konečně použití

První použití, které si ukážeme, bude slíbený nejhezčí<sup>27</sup> důkaz AG nerovnosti.

**Tvrzení.** Pro kladná čísla  $x_1, \dots, x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , platí

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

*Důkaz.* Nejdříve na celou nerovnost (pozor trik!) vypustíme logaritmus a použijeme Jensenovu nerovnost pro konkávní funkci  $f(x) = \ln(x)$  na  $\mathbb{R}^+$ . Poznamenejme, že funkce  $\ln(x)$  má následující vlastnosti

- (i)  $\ln(x)$  je rostoucí funkce,
- (ii)  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$  pro libovolná  $x, y \in \mathbb{R}^+$ ,
- (iii)  $\ln(x^n) = n \ln(x)$  pro libovolné  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{R}$  (pro  $n \in \mathbb{N}$  plyne tato vlastnost z předchozí).

Důvod, proč vybíráme zrovna tuto funkci, je právě ten, že převádí „součet na součin“. Stačí si jen napsat Jensenovu nerovnost ( $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ )

$$\ln\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \ln(x_1) + \dots + \frac{1}{n} \ln(x_n)$$

<sup>27</sup>Podle našeho subjektivního názoru.

a uvědomit si, že pravá strana je opravdu přesně to, co chceme, protože

$$\frac{1}{n} \ln(x_1) + \dots + \frac{1}{n} \ln(x_n) = \ln(\sqrt[n]{x_1}) + \dots + \ln(\sqrt[n]{x_n}) = \ln(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}).$$

Vzhledem k tomu, že logaritmus je rostoucí, můžeme jej (z výchozího a obdrženého výrazu) odstranit při zachování nerovnosti a dostáváme AG nerovnost.

Možná jsme přece jen začali poměrně zostrá. Raději si nyní ukážeme nějaká naprosto netriková použití Jensenovy nerovnosti. Častokrát ji lze velmi účinně použít při důkazech nerovností, v nichž vystupují goniometrické funkce (řekněme proměnných  $\alpha, \beta, \gamma$ ). Obzvláště pokud něco víme o součtu  $\alpha + \beta + \gamma$ .

**Příklad.** Jsou-li  $\alpha, \beta, \gamma$  úhly v trojúhelníku, dokažte

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

*Řešení.* Použijeme funkci  $f(x) = \sin(x)$ , která je konkávní na intervalu  $(0, \pi)$  (zřejmě  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ ). Podle Jensenovy nerovnosti platí

$$\frac{1}{3} \sin \alpha + \frac{1}{3} \sin \beta + \frac{1}{3} \sin \gamma \leq \sin \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zkuste použít Jensenovu nerovnost sami. Ve všech následujících cvičeních jsou  $\alpha, \beta, \gamma$  úhly v trojúhelníku.

**Cvičení.** Dokažte

- (i)  $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$ ,
- (ii)  $\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,
- (iii)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$ ,
- (iv)  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

*Návod.* V (iv) hledejte nejdříve AG.

**Příklad.** (Varovný!) Nechť  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou úhly v trojúhelníku. Dokažte

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

*Návod.* Pozor! Pokud vás láká použít Jensenovu nerovnost, zadržte! Funkce  $\cos x$  bohužel není konkávní na celém intervalu  $(0, 2\pi)$ , což bychom potřebovali. Zkuste vymyslet jiný přístup. :) Upozorňujeme však, že se jedná o spíše obtížnou úlohu.

Nerovnosti s goniometrickými funkcemi mohou vypadat jako z jiného světa. Popravdě se jedná o natolik rozsáhlou kapitolu, že by bylo možné o ní napsat samostatný seriál. Jejich kouzlo spočívá v tom, že „obyčejné“ nerovnosti lze často chytrými substitucemi převádět právě na goniometrické nerovnosti a v goniometrii existuje celá řada užitečných identit a nerovností, které mohou vést k cíli.

Přišel ten správný čas vytáhnout z rukávu triky při používání Jensenovy nerovnosti. Ukážeme si dva příklady a potom se pokusíme vyložit některé principy.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

**Příklad.** Pro kladná  $a, b, c$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

*Řešení.* Vzhledem k tomu, že se jedná o homogenní nerovnost, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $a + b + c = 1$ . Použijeme konvexní funkci  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  na  $\mathbb{R}^+$ . Podle Jensenovy nerovnosti máme (koeficienty jsou postupně  $a, b, c$ )

$$\sum_{\text{cyc}} a \frac{1}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{1}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}},$$

takže nám bude stačit dokázat nerovnost

$$1 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

Tu však stačí zpětně homogenizovat. Chceme tedy dokázat

$$(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc,$$

což ale platí pro libovolná kladná  $a, b, c$ , neboť se jedná pouze o snadné cvičení na AG nerovnost.

**Příklad.** Pro kladná  $a, b, c$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} a \sqrt{a^2 + 2(b^2 + c^2) + (b + c)^2} \leq (a + b + c)^2.$$

*Řešení.* Nejdříve obě strany vydělíme  $a + b + c$  a získáme

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a + b + c} \sqrt{a^2 + 3(b^2 + c^2) + 2bc} \leq a + b + c.$$

Dále použijeme Jensenovu nerovnost pro konkávní funkci  $f(x) = \sqrt{x}$  na  $\mathbb{R}^+$  (koeficienty jsou postupně  $\frac{a}{a+b+c}$ ,  $\frac{b}{a+b+c}$ ,  $\frac{c}{a+b+c}$ ), a zbyde nám dokázat

$$\sqrt{\frac{\sum_{\text{cyc}} (a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 2abc)}{a + b + c}} \leq a + b + c = \sqrt{\frac{(a + b + c)^3}{a + b + c}}.$$

Tato nerovnost není po odstranění odmocnin nikterak obtížná (dokonce obě strany jsou si rovny), pokud se nebojíme roznásobit  $(a + b + c)^3$ . S využitím zápisu přes cyklické sumy vidíme, že<sup>28</sup>

$$\sum_{\text{cyc}} (a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 2abc) = \sum_{\text{cyc}} a(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca).$$

Je potřeba si dobře rozmyslet, proč se tyto výrazy zcela rovnají.<sup>29</sup>

<sup>28</sup>Druhý způsob, který se rovněž vyhýbá možnosti, že bychom se mohli z roznásobování zbláznit, je roznásobit závorku pomocí multinomické věty, která funguje podobně jako binomická věta (viz například [http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_theorem)).

<sup>29</sup>Musíte si představit cyklické záměny jednotlivých výrazů. Potom se například člen  $ab^2$  „sečte“ se členem  $2ca^2$ , jehož cyklickou záměnou je právě  $2ab^2$ .



Nejdříve bychom chtěli poznamenat, že homogenizace  $a + b + c = 1$  nebo vydělení výrazem  $a + b + c$  (a následné použití koeficientů  $\frac{a}{a+b+c}$ ) je rovnocenný postup. A teď jakési malé shrnutí, jak Jensenovu nerovnost používat. Jako první si rozmyslete, jestli je Jensenovu nerovnost potřeba použít pro konvexní, nebo pro konkávní funkci. Až potom je dobré hledat vhodnou funkci. Poslední krok je volba vhodných koeficientů. Při tomto kroku nám může pomoci homogenita a lze proto o nějakém výrazu (v příkladu výše to byl výraz  $a + b + c$ ) bez újmy na obecnosti předpokládat, že je roven jedné. Ostatně vhodnou volbou koeficientů lze docílit těch největších triků a vyřešit tak i opravdu velmi obtížné nerovnosti. Užitečné pozorování je, že Jensenova nerovnost je často vhodný nástroj pro odstranění odmocnin, které jsou většinou zdrojem problémů, a rovněž nás umí při vhodné volbě funkce  $f$  zbavit zlomků.

**Cvičení.** Pro kladná  $a, b, c$  dokažte

$$\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{3(a^3 + b^3 + c^3)}.$$

**Cvičení.** Pro kladná  $a, b, c$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(b+c)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

*Návod.* Prozradíme, že funkce  $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$  je konvexní na intervalu  $(0, 1)$ . Zkuste proto položit  $a + b + c = 1$ . Všimněte si, že již při výběru vhodné funkce nám může homogenita velmi pomoci.

## AG a zlomky

Ještě než si ukážeme novou zbraň na nerovnosti se zlomky, provedme jednu velmi důležitou úvahu o rovnostech.

### Úvaha o rovnostech

Představme si, že dokazujeme nerovnost  $L(a, b, c) \geq P(a, b, c)$  a náš důkaz se skládá z dílčích odhadů

$$L \geq L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq P.$$

Pokud pro nějakou trojici čísel  $a, b, c$  platí  $L(a, b, c) = P(a, b, c)$ , tedy nastává rovnost, pak platí

$$L(a, b, c) = L_1(a, b, c) = \dots = P(a, b, c),$$

a rovnost tedy platí i při všech použitých odhadech. Víme-li tedy o nějaké trojici, pro niž nastává rovnost (velmi často pro  $a = b = c$ ), pak má smysl používat pouze odhady, v nichž pro takovou trojici též nastává rovnost. Jak za chvíli uvidíte, tato banální myšlenka může být velmi užitečná.

### Jdeme na to!

Možná vás překvapí, že se dá velmi dobře používat i v nerovnostech se zlomky. Myšlenka je velmi jednoduchá, prostě zlomek sečteme s jeho jmenovatelem nebo jeho částmi. Sledujte!

**Příklad.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  ukažte nerovnost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

*Řešení.* Podle AG nerovnosti platí  $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a$ . Sečtením tří analogických nerovností získáme to, co jsme měli dokázat.

**Příklad.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  ukažte

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

*Řešení.* Použijeme AG nerovnost pro tři členy  $\frac{a^3}{bc} + b + c \geq 3a$  a součtem tří takových nerovností získáme výsledek.

**Cvičení.** Ukažte následující nerovnosti pro kladná čísla  $a, b, c$ :

- (i)  $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c,$   
 (ii)  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca,$   
 (iii)  $\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geq a^2 + b^2 + c^2.$

*Návod.* Ve druhém příkladu vezměte do AG nerovnosti dva členy z levé strany a jeden z pravé, ve třetím příkladu použijte AG nerovnost pro pět prvků.

Aplikace této metody nejsou zatím moc přesvědčivé, neboť předchozí nerovnosti umíme spolehlivě dokazovat třeba permutační nerovnostmi, ale myšlenka je snad již zcela jasná. Například jste si už určitě všimli, jak nám čitatel zlomku napovídá, kolik členů vzít do AG nerovnosti. Pojdme nyní zkusit tímto způsobem dokázat nějakou opravdovou nerovnost.

**Příklad.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} \geq \frac{a+b+c}{4}.$$

*Řešení.* Myšlenka řešení je teď již zcela jasná. Nesmíme se ale ukvapit a zapomenout na naši úvahu o rovnosti. V dokazované nerovnosti evidentně nastává rovnost pro  $a = b = c$  a při sestavování AG nerovnosti na to musíme myslet. Ta správná AG nerovnost je

$$8 \cdot \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + (a+b) + (a+c) \geq 3 \cdot 2a.$$

Koeficient 8 je zvolen právě tak, abychom pro volbu  $a = b = c$  aplikovali AG nerovnost na tři stejná čísla. Dokazovaná nerovnost se samozřejmě získá sečtením tří podobných AG nerovností.

Pořád je to velmi jednoduché, ne? Zkuste si to sami na následujících příkladech a nezapomeňte zvolit správné koeficienty.

**Cvičení.** Pro  $a, b, c > 0$  ukažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{b(2c+a)} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{b+2c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

*Návod.* Nejprve si zlomek rozšiřte, jak by to udělal CS zlomkobijec.

## Cauchy a odmocniny

Viděli jsme, jaké netušené možnosti ještě skrývá AG nerovnost, nicméně ani Cauchyho nerovnost zdaleka neřekla své poslední slovo. Již víme, že pokud chceme součet tří nějakých zlomků odhadnout ve směru  $\geq$ , je CS zlomkobijec neocenitelným pomocníkem. Nyní budeme chtít součet tří výrazů obsahujících odmocniny odhadnout naopak ve směru  $\leq$ . Nerovnosti obsahující odmocniny patří mezi ty nejtěžší, ovšem díky CS na ně hned budeme mít účinnou zbraň.

Nejprve ale uveďme tvar CS, který budeme pro práci s odmocninami používat.

**Tvrzení.** (CS na odmocniny) *Bud'  $n$  přirozené číslo a  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  čísla kladná. Pak platí*

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}.$$

**Cvičení.** (Lehoučké) Rozmyslete si, že to je opravdu důsledek CS.

**Cvičení.** Dokažte následující nerovnosti, v nichž jsou všechna uvedená čísla kladná.

- (i)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12$ ,
- (ii)  $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{3(a^3 + b^3 + c^3)}$ ,
- (iii)  $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)}$ ,
- (iv)  $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq a + b + c$ ,
- (v)  $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)}$ .

Celá věda tedy spočívá v interpretaci výrazu pod odmocninou jako nějakého součinu, popřípadě v tom, že občas nějaký ten člen, jenž se odvážil vylézt před odmocninu, stáhneme zase dovnitř. Díky zkušenostem, které máme s CS zlomkobijcem, už jistě vidíme, že síla CS na odmocniny bude v tom, že ať máme pod odmocninou cokoliv, můžeme to jako součin chápat více způsoby. Příklady (ii) a (iii) jsou toho názorným důkazem. Opět tedy budeme mít k dispozici celou škálu odhadů a je velká šance, že aspoň jeden z nich bude dostatečně silný. Pojdme si to zkusit na těžké úloze!

**Příklad.** Kladná čísla  $x, y, z \geq 1$  splňují  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ . Dokažte

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}.$$

(Írán 1998)

**Řešení.** Předně se zaradujeme, protože nerovnost má k použití CS na odmocniny vhodný tvar. Nyní se musíme rozhodnout, jak se dívat na výraz  $x-1$ . Vzhledem k zadané podmínce se nabízí  $x-1 = x(1 - \frac{1}{x})$ . Zkusme tedy použít CS na odmocniny

$$\sqrt{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} + \sqrt{y\left(1 - \frac{1}{y}\right)} + \sqrt{z\left(1 - \frac{1}{z}\right)} \leq \sqrt{(x+y+z)\left(3 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\right)}$$

a vidíme, že po dosazení podmínky je úloha vyřešena.

Věříme, že způsob použití CS na odmocniny je jasný a můžeme jej potrénovat na třech úlohách pro opravdové šampióny. Na nich mimo jiné spatříte, jak účinné je obě varianty CS kombinovat.

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

*Návod.* CS zlomkobijec, pak šikovní CS na odmocniny (uvědomte si, že dá odhad správným směrem) a nakonec AG.

**Cvičení.** Kladná čísla  $x, y, z$  splňují  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ . Dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^3}{\sqrt{y^2 + z^2 + 7}} \geq 1.$$

*Návod.* Opět začněte CS zlomkobijcem následovaným CS na odmocniny. V něm zvolte rozklad na součin tak, abyste pak mohli substituovat  $x^2 + y^2 + z^2 = A$  a v celé nerovnosti figurovala jen proměnná  $A$ .

**Cvičení.** Buďte  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  pevná. Ukažte nerovnosti

$$\begin{aligned} \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} &\geq \\ &\geq \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2} + \sqrt{b^2x^2 + c^2y^2 + a^2z^2} + \sqrt{c^2x^2 + a^2y^2 + b^2z^2} \geq \\ &\geq a + b + c, \end{aligned}$$

pro  $x, y, z \in \mathbb{R}$  taková, že  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . (CRUX journal)

*Návod.* V jednom z odhadů se nebojte umocnit, hodně členů se odečte a na součiny odmocnin půjde opět použít CS.

Možná jste si všimli, že použití CS zlomkobijce a následně CS na odmocniny dá často totéž jako jedno použití Jensenovy nerovnosti (viz první cvičení z tohoto bloku).

Na závěr kapitoly o CS si formou cvičení uvedeme dvě velmi kreativní použití této nerovnosti. Zároveň tím podáme řešení dvou *úloh na přemýšlení* z minulého dílu.

**Cvičení.** Buďte  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  taková, že  $abc = 1$ . Dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^5 + b^2 + c^2} \leq 3.$$

(IMO 2005)

*Návod.* Použijte CS na odhad jmenovatelů:

$$(a^5 + b^2 + c^2)(bc + b^2 + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

**Cvičení.** Ukažte, že pro  $x, y, z \geq 1$  platí

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x(yz+1)}.$$

*Návod.* Dvakrát použijte CS ve tvaru

$$\sqrt{((x-1)+1)(1+(y-1))} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}.$$

## Úlohy na přemýšlení

I tentokrát jsme pro vás připravili několik velmi zajímavých nerovností, k jejichž řešení je spíš než znalostí potřeba dobrého nápadu. Zkuste je tedy vyřešit postupy, které nepřekračují naše současné vědomosti.

**Příklad.** (zobecněná permutační nerovnost) Mějme posloupnosti  $x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ ,  $y_1 \geq \dots \geq y_n \geq 0$  a  $z_1 \geq \dots \geq z_n \geq 0$ . Nechtě  $\sigma, \pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  jsou libovolné permutace. Potom platí

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i z_i \geq \sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)} z_{\pi(i)}.$$

Dokažte.<sup>30</sup>

**Příklad.** Dokažte, že pro kladná čísla  $x, y, z$  platí nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx).$$

(Darij Grinberg)

**Příklad.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  ukažte

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

(Čína 2004)

---

<sup>30</sup>Předem upozorňujeme, že předpoklad o nezáporných číslech nelze vypustit, a je ho tedy potřeba v důkaze využít. Rozhodně nepůjde přímo aplikovat důkaz obvyklé permutační nerovnosti.

## Zadání 2. seriálové série

Každé řešení je doplněno o poznámku obsahující drobná dovysvětlení, upozorňující na kroky, které činily problémy, apod. Poznámky vznikly na základě řešení zaslaných řešiteli MKS.

**Úloha 4.** Pro  $a, b, c > 0$  taková, že  $abc = 1$ , ukažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

(IMO shortlist 1998)

**Úloha 5.** Buďte  $a, b, c$  strany trojúhelníka a  $\alpha, \beta, \gamma$  jeho vnitřní úhly (standardně značené). Ukažte, že platí

$$a \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + b \cdot \cos \frac{\beta}{2} + c \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{2}.$$

**Úloha 6.** Kladná čísla  $a, b, c$  splňují  $ab + bc + ca \geq 3$ . Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$





## Řešení 2. seriálové série

**Úloha 4.** Použijeme AG nerovnost tak, jak bylo popsáno v kapitole *AG a zlomky*. Každý zlomek z levé strany prostě sečteme s výrazy v jeho jmenovateli, přičemž chceme, aby rovnost nastávala právě v případě  $a = b = c = 1$ , v němž evidentně nastává rovnost i v dokazované nerovnosti. Podle AG nerovnosti pro tři prvky tedy platí

$$\left(8 \cdot \frac{a^3}{(1+b)(1+a)}\right) + (1+a) + (1+b) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{8a^3} = 6a.$$

Sečtením tří takových nerovností získáme po vydělení osmi

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{(1+b)(1+a)} \geq \frac{a+b+c}{2} - \frac{3}{4},$$

přičemž nerovnost, kterou nám nyní stačí dokázat, je ekvivalentní s  $a + b + c \geq 3$ . Tu ale snadno dokážeme AG nerovností

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3.$$

V poslední použité nerovnosti nastává rovnost pouze pro  $a = b = c = 1$ , tedy v celé nerovnosti může nastat (a skutečně nastává) rovnost jediné v tomto případě. Tím je úloha vyřešena.

**Poznámka.** Nerovnost z této úlohy není příliš silná, a tak na ni funguje i mnoho jiných přístupů.

**Úloha 5.** Nejdříve si rozmyslíme, že trojice  $(a, b, c)$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma)$  jsou souhlasně uspořádané. Jinými slovy chceme ukázat, že proti největšímu úhlu je nejdelší strana. To nahlédneme ze sinové věty. Předpokládejme, že trojúhelník je ostroúhlý (nebo pravoúhlý), tj.  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Protože na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  je sinus rostoucí, ze sinové věty

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

plyne, že trojice  $(a, b, c)$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma)$  jsou souhlasně uspořádané. V případě tupouhelného trojúhelníku můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$  (jinak trojúhelník přeznačíme). Díky rovnosti  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  platí  $\alpha \geq \pi - \alpha \geq \beta \geq \gamma$  a navíc zřejmě  $\pi - \alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Použitím sinové věty ve tvaru

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

dostáváme, že  $a \geq b \geq c$ .

Protože kosinus je na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  klesající, jsou trojice  $(a, b, c)$ ,  $(\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}, \cos \frac{\gamma}{2})$  opačně uspořádané a Čebyševova nerovnost má tvar

$$a \cos \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\beta}{2} + c \cos \frac{\gamma}{2} \leq \left( \frac{a+b+c}{3} \right) \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \right).$$

Použitím Jensenovy nerovnosti pro funkci  $\cos$ , která je konkávní na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ , s vahami  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$  dostáváme

$$\frac{1}{3} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{\beta}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \cos \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a spojením posledních dvou nerovností získáme dokazovanou nerovnost. Rovnost v Jensenově nerovnosti nastává jen v případě  $\alpha = \beta = \gamma$ , protože funkce  $\cos$  je na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  ryze konkávní. Ve stejném případě nastává rovnost i v Čebyševově nerovnosti.

*Druhé řešení:* (volně podle *Anh Dung Le*, řešitele MKS) Myšlenkou tohoto řešení je použít místo Jensenovy nerovnosti známý vztah

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right).$$

Zaměříme se proto už jen na důkaz nerovnosti  $\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . Protože pro úhly v trojúhelníku je zřejmě  $\cos \left( \frac{\alpha+\beta}{4} \right) > 0$ , platí nerovnost

$$\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{4} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{4} \right) \leq 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{4} \right).$$

Proč by zrovna tato nerovnost měla vést k cíli? Protože přeci víme (letným pohledem), že rovnost má nastat pro  $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{6}$  a v tomto případě nastává rovnost i v uvedené nerovnosti. Levá strana dokazované nerovnosti obsahuje tři sčítance, ale nám by se více hodil sudý počet, a tak si jeden přidáme. Při přidávání ale dbáme na to, abychom respektovali podmínku, za níž nastává rovnost. Proto k oběma stranám dokazované nerovnosti přičteme  $\cos \frac{\pi}{6}$ . Dále už stačí jen sledovat

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \right) + \left( \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\pi}{6} \right) &\leq 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{4} \right) + 2 \cos \left( \frac{\gamma + \frac{\pi}{3}}{4} \right) \leq \\ &\leq 4 \cos \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma + \frac{\pi}{3}}{8} \right) \leq 4 \cos \frac{\pi}{6} = 3 \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Všimněte si, že tato myšlenka je vlastně úplně stejná jako myšlenka v seriálu v sekci *AG a zlomky*, kde se rovněž přidávají členy a bere se přitom zřetel na případ rovnosti.

**Poznámka.** K řešení od *Anh Dung Le* ještě poznamenejme, že je to přesný návod k důkazu nerovnosti z *varovného příkladu* v sekci *Jensenova nerovnost* (známe však ještě nejméně dva další důkazy varovného příkladu).

Nedostatkem mnoha došlých řešení bylo použití Jensenovy nerovnosti beze zmínky, na jakém intervalu se používá, což je přitom klíčový krok (jeho nutnost demonstruje *varovný příklad*).

Nakonec dodejme, že mnoho řešitelů použilo Jensenovu a Čebyševovu (resp. permutační) nerovnost v opačném pořadí, než jak je to provedeno ve vzorovém řešení. Tento postup vyžadoval použití Jensenovy nerovnosti s koeficienty  $\frac{a}{a+b+c}$ ,  $\frac{b}{a+b+c}$ ,  $\frac{c}{a+b+c}$  (často se pro zjednodušení položilo  $a + b + c = 1$ ). Pak zbylo dokázat nerovnost

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{2(a + b + c)} \geq \frac{\pi}{6},$$

která plyne ihned z Čebyševovy nerovnosti (resp. součtem permutačních nerovností)

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)(\alpha + \beta + \gamma).$$

**Úloha 6.** V prvním kroku se zbavíme odmocnin pomocí Jensenovy nerovnosti<sup>31</sup> pro konvexní funkci  $1/\sqrt{x}$  s váhovými koeficienty  $\frac{a}{a+b+c}$ ,  $\frac{b}{a+b+c}$ ,  $\frac{c}{a+b+c}$ . Máme tedy

$$\frac{L}{a + b + c} = \sum_{cyc} \left( \frac{a}{a + b + c} \cdot \frac{1}{\sqrt{a + b}} \right) \geq \sqrt{\frac{a + b + c}{\sum_{cyc} (a^2 + ab)}},$$

kde  $L$  je levá strana zadané nerovnosti. Po úpravě a umocnění na druhou (což je v kladných číslech ekvivalentní úprava) nám zbývá dokázat

$$\frac{(a + b + c)^3}{(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca)} \geq \frac{9}{2}.$$

Rozmysleme si, že nyní můžeme člen  $ab + bc + ca$  díky vazební podmínce odhadnout trojkou (ve správném směru). V nerovnosti, kterou nám nyní stačí dokázat, můžeme provést substituci  $a + b + c = s$ , roznásobit a vzniklou polynomickou nerovnost hbitě upravit do tvaru

$$(s - 3)^2(2s + 3) \geq 0,$$

z něhož je její platnost již zřejmá. K tomu, aby nastala rovnost, potřebujeme rovnost i v Jensenově nerovnosti. Tam ovšem nastává ( $1/\sqrt{x}$  je ryze konvexní), pouze pokud

$$a + b = b + c = c + a \quad \Leftrightarrow \quad b = c = 1.$$

Tedy nastává rovnost i v celé nerovnosti, a my jsme tím pádem hotovi.

**Poznámka.** Žádné správné řešení se neobešlo bez Cauchyho či Jensenovy nerovnosti.

<sup>31</sup>Ke stejnému odhadu dospějeme i použitím CS zlomkobijce a posléze CS na odmocniny.



# Nerovnosti, díl III

Po nadílce z minulého dílu se jistě nemůžete dočkat, co jsme na vás přichystali tentokrát. Díky tomu, že naše znalosti jsou už na slušné úrovni, můžeme si představit i ty nejsilnější metody k dokazování nerovností. Ukážeme si například, proč jsou symetrické nerovnosti „lehké“, či jak nerovnosti upravovat na součet čtverců. Též si osvojíme různé substituce a samozřejmě pár nových užitečných nerovností. Navíc máte jedinečnou příležitost, která se vám při studiu klasických matematických disciplín jen tak nenaskytne, a to seznámit se s těmi nejmodernějšími výsledky v oboru, neboť většina zde uvedených metod je opravdu jen pár let stará! Začneme tedy!

## Substituce

Téma substitucí je natolik rozsáhlé a nachází uplatnění v tolika různých oblastech, že se ani nebudeme snažit jej kompletně vyčerpat. Ukážeme si jen ty, které v souvislosti s nerovnostmi potkáváme nejčastěji.

Na substitucích je nepříjemné, že pokud je neznáte, je téměř nemožné na ně za krátký čas (při soutěžích) přijít. Přitom ale vhodná substituce může úlohu prakticky vyřešit. Začneme od těch jednodušších případů. Budeme se zabývat nerovnostmi s podmínkou a naší snahou bude tyto nerovnosti pomocí vhodné substituce převést (bezztrátově) na nerovnosti bez podmínky. Ačkoliv to již umíme pomocí homogenizace, mohou se někdy hodit i jiné postupy. V některých případech může být navíc podmínka natolik nepříjemná, že vůbec není jasné, jak by se měla homogenizace provést.

### **Případ** $xyz = 1$

Předpokládejme, že máme dokazovat nerovnost v proměnných  $x, y, z$  pro všechna kladná  $x, y, z$  splňující  $xyz = 1$ . Proč rovnou nedosadit  $z = \frac{1}{xy}$ ? Nemusí to být vždy špatně, ale většinou dostaneme nerovnost, která ztratí veškeré symetrie a hlavně je nehomogenní, což

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

je nepříjemné. Snahou je proto ekvivalentně přejít k novým proměnným  $a, b, c$ , které na sobě budou zcela nezávislé (zbavíme se podmínky) a neudělají nám nerovnost „škaradější“. Zkusme za  $x, y, z$  dosadit

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{c}, \quad z = \frac{c}{a}.$$

Tvrdíme, že taková  $a, b, c > 0$  existují, právě když  $xyz = 1$ . Je-li totiž  $xyz = 1$ , pak  $a$  zvolíme libovolně,  $b$  dopočteme z první rovnosti,  $c$  dopočteme z druhé a ověříme, že platí  $z = \frac{1}{xy} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{a}$ . Pokud naopak taková  $a, b, c$  existují, zřejmě  $xyz = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$ .

**Cvičení.** (Důležité!) Rozmyslete si, že přechod od nerovnosti v proměnných  $x, y, z$  s podmínkou  $xyz = 1$  k nerovnosti v proměnných  $a, b, c$  bez podmínky dosazením  $x = \frac{a}{b}$ ,  $y = \frac{b}{c}$ ,  $z = \frac{c}{a}$  je bezztrátový. Dále si rozmyslete, že nová nerovnost je vždy homogenní (stupně 0).

*Návod.* Ukažte, že pokud existuje trojice, pro niž neplatí jedna z nerovností, pak lze najít i trojici, pro niž neplatí druhá.

**Cvičení.** Pro kladná  $a, b, c$  splňující  $abc = 1$  dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

(Celostátní kolo MO 2003)

Všimněte si, že ačkoliv vycházejí jiné nerovnosti než při homoginizaci, příslušné soustavy (pro AG nerovnost) mají tatáž řešení.

**Cvičení.** Pro kladná  $a, b, c$  splňující  $abc = 1$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

*Návod.* Po substituci hledejte CS zlomkobijce, AG potom práci dodělá. Dobře zafunguje i substituce  $x = \frac{1}{a}$  ve spojení se zlomkobijcem.

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  splňující  $abc = 1$  dokažte

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

(IMO 2000)

*Návod.* Nerovnost, kterou získáte po vynásobení  $xyz$ , je opravdu (možná překvapivě) jen jiný tvar Schurovy nerovnosti (z cyklické nerovnosti jsme dostali symetrickou!).

**Poznámka.** Z českých účastníků na IMO 1995 vyřešil tuto úlohu jeden, na IMO 2000 žádný.

Nakonec si shrneme, k čemu výše uvedená substituce vede. Nikdo nám nezaručuje, že nová nerovnost bude snadněji dokazatelná, ovšem příjemné je, že se bezztrátově zbavíme

podmínky, a přitom se nerovnost nestane nepřehlednou, jak se tomu většinou stane po přímém dosazení.

### Případ $a, b, c$ strany trojúhelníku

Budeme pokračovat dalšími užitečnými substitucemi. Uvažujme nerovnost v proměnných  $a, b, c$ , kde  $a, b, c$  tvoří strany trojúhelníku (tedy jsou to kladná čísla splňující podmínky  $a + b > c$ ,  $b + c > a$ ,  $c + a > b$ ). Pokud nás tato podmínka spíše obtěžuje, máme možnost se jí zbavit pomocí substituce

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y.$$

Ukážeme, že taková čísla  $x, y, z > 0$  existují (a dokonce jsou určena jednoznačně), právě když  $a, b, c$  tvoří strany trojúhelníku.

Tvoří-li  $a, b, c$  strany trojúhelníku, pak délky úseček vedoucích od vrcholů k bodům dotyku kružnice vepsané s jeho stranami jsou hledaná  $x, y, z$ . Lze je jednoznačně vyjádřit (pouhým vyřešením soustavy) jako

$$x = \frac{-a + b + c}{2}, \quad y = \frac{a - b + c}{2}, \quad z = \frac{a + b - c}{2},$$

což jsou jistě kladná čísla. Naopak pokud taková  $x, y, z$  existují, pak zřejmě  $a + b = x + y + 2z > x + y = c$  a analogicky platí dvě zbývající nerovnosti. Stejně jako v předchozím případě není těžké si rozmyslet, že přechod od nerovnosti s podmínkou v proměnných  $a, b, c$  k nerovnosti bez podmínky v proměnných  $x, y, z$  je bezztrátový.

**Cvičení.** Nechtě  $a, b, c$  jsou strany trojúhelníka. Dokažte

$$(i) \sum_{\text{cyc}} a^2(b + c - a) \leq 3abc, \quad (\text{IMO 1964})$$

$$(ii) \sum_{\text{cyc}} a^2b(a - b) \geq 0. \quad (\text{IMO 1983})$$

*Návod.* Ve druhém cvičení buďte připraveni na použití permutační nerovnosti (nejlépe po vydělení  $xyz$ ).

### Případ $x + y + z = xyz$

Přidejme nepatrně na obtížnosti. Uvažujme nerovnost v proměnných  $x, y, z > 0$  s podmínkou  $x + y + z = xyz$ . Porovnejme následující dva vztahy:

$$z = -\frac{x + y}{1 - xy}, \quad \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } \beta}.$$

Očividně mají naprosto stejnou strukturu. Přidáme-li ještě, že  $\text{tg}(\pi - (\alpha + \beta)) = -\text{tg}(\alpha + \beta)$ , nabízí se, že podmínka  $x + y + z = xyz$  má něco společného s trojúhelníkem. Ať už jsou  $x, y$  jakákoliv kladná čísla, existují  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$  taková, že  $x = \text{tg } \alpha$ ,  $y = \text{tg } \beta$ . Podle výše uvedeného je potom  $z = \text{tg}(\pi - (\alpha + \beta))$ . Protože  $z > 0$ , je navíc  $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

Právě jsme ukázali, že z podmínky  $x+y+z = xyz$  plyne existence ostroúhlého trojúhelníku s úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  takovými, že

$$x = \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \operatorname{tg} \beta, \quad z = \operatorname{tg} \gamma.$$

Naopak má-li ostroúhlý trojúhelník úhly  $\alpha, \beta, \gamma$ , pak platí  $x+y+z = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = xyz$ . Proto lze provést stejnou úvahu jako v *důležitém* cvičení. Zjišťujeme, že i tentokrát je přechod k nerovnosti bez podmínky bezztrátový.<sup>32</sup>

**Cvičení.** Necht'  $x, y, z$  jsou kladná čísla splňující  $x + y + z = xyz$ . Dokažte<sup>33</sup>

- (i)  $x + y + z \geq 3\sqrt{3}$ ,
- (ii)  $xyz \geq 3\sqrt{3}$ ,
- (iii)  $xy + yz + zx \geq 9$ .

*Návod.* Jensenova nerovnost po substituci, nebo jen AG nerovnost bez substituce.

Samozřejmě je otázkou, zda si takovou substitucí pomůžeme, a zda ji vůbec potřebujeme. Odpověď (jak už to tak bývá) není jednoznačná. Dá se říci, že substituci většinou nepotřebujeme tam, kde lze nerovnost nějak jednoduše homogenizovat, a tam, kde ji lze převést (třeba i pomocí ztrátových metod) na několikeré použití předchozího cvičení. Pokud se však pro ni rozhodneme, můžeme využívat všechny známé rovnosti a nerovnosti platné v trojúhelníku, které jsou mnohdy velmi silné.<sup>34</sup> Všimněte si, že jsme se ale podmínky nezbavili, protože proměnné  $\alpha, \beta, \gamma$  (všechny z intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ ) jsou vázané vztahem  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

Další možností je upravit podmínku na tvar

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1.$$

Po substituci  $x' = \frac{1}{x}$ ,  $y' = \frac{1}{y}$ ,  $z' = \frac{1}{z}$  dostaneme ještě hezčí podmínku tvaru  $x'y' + y'z' + z'x' = 1$ , se kterou se většinou dá nějak vypořádat (homogenizace bývá jednoduchá).

**Cvičení.** Dokažte, že přechod od nerovnosti v proměnných  $x, y, z > 0$  s podmínkou  $xy + yz + zx = 1$  pomocí substituce

$$x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

k nerovnosti v proměnných  $\alpha, \beta, \gamma$ , jimiž jsou úhly v trojúhelníku (může být i tupouhlý), je bezztrátový.

<sup>32</sup>Z právě ukázané substituce plyne i jedno obecné poučení. Pokud narazíte na nějaké vztahy, které vám svou strukturou připomínají trigonometrické vztahy, vyzkoušejte, zda opravdu není možné úlohu ekvivalentně přeformulovat do světa trigonometrie. Tento trik může pomoci při řešení nejrůznějších úloh.

<sup>33</sup>Cvičení (i) a (ii) jsou sice kvůli podmínce  $x + y + z = xyz$  totožná, ale předešleme, že obvykle se hodí umět odhadnout všechny výrazy uvedené v (i), (ii), (iii). To jsou totiž právě ty výrazy, které se používají při symetrické substituci, o níž pojednává sekce *Zbraň hromadného ničení*.

<sup>34</sup>Kapitola nerovností platných v trojúhelníku je už nad rámec tohoto textu. Nicméně můžeme alespoň odkázat na článek [http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~kenny/Trigonometric\\_substitutions.pdf](http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~kenny/Trigonometric_substitutions.pdf).



**Cvičení.** Pro kladná  $x, y, z$  splňující  $x + y + z = xyz$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

(Korea 1998)

*Návod.* Vzpomeňte si na varovný příklad u Jensenovy nerovnosti.

**Případ**  $x + y + z + 2 = xyz$

Stejně jako v předchozích případech uvažujme nerovnost v proměnných  $x, y, z > 0$  s podmínkou  $x + y + z + 2 = xyz$ .

**Cvičení.** Necht  $x, y, z$  jsou kladná čísla splňující  $x + y + z + 2 = xyz$ . Dokažte

- (i)  $x + y + z \geq 6$ ,
- (ii)  $xyz \geq 8$ ,
- (iii)  $xy + yz + zx \geq 12$ .

*Návod.* (i) Převeďte na polynomickou nerovnost v proměnné  $s = x + y + z$ . Jejím kořenem je například  $s = 6$ , je však potřeba najít i další kořeny.

Tato podmínka je již o poznání nepříjemnější, protože obecně není vůbec snadné nerovnost homogenizovat. Pro nalezení vhodné substituce potřebujeme podmínku šikovně upravit. Není těžké ověřit (roznásobte si!), že je ekvivalentní s podmínkou

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1,$$

těžké spíše je na tento ekvivalentní tvar přijít. Zvolíme-li tedy substituci  $a = \frac{1}{1+x}$ ,  $b = \frac{1}{1+y}$ ,  $c = \frac{1}{1+z}$ , má podmínka tvar  $a + b + c = 1$ . Nyní snadno dopočítáme, že  $x = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}$ . Celkem tedy dostáváme, že z podmínky  $x + y + z + 2 = xyz$  plyne existence kladných čísel  $a, b, c$  takových, že

$$x = \frac{b+c}{a}, \quad y = \frac{c+a}{b}, \quad z = \frac{a+b}{c}.$$

Naopak pokud taková  $a, b, c$  existují, je jen otázkou jednoduchého výpočtu ověřit, že

$$x + y + z + 2 = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + 2 = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} = xyz.$$

Jedná se tedy znovu o bezztrátový přechod. Nová nerovnost bude homogenní (stupně 0) a bez podmínky.

**Cvičení.** Dokažte, že nerovnost v proměnných  $x, y, z > 0$  s podmínkou  $xy + yz + zx + 2xyz = 1$  lze bezztrátově převést na nerovnost v proměnných  $a, b, c > 0$  bez podmínky.

*Návod.*  $x = \frac{1}{x'}$ .

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

**Cvičení.** Pro kladná  $x, y, z$  splňující  $xy + yz + zx + xyz = 4$  dokažte

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

(Indie 1998)

*Návod.*  $x = 2x'$  a po substituci a vynásobení jmenovateli použijte Schurovu nerovnost.

**Příklad.** Pro kladná  $x, y, z$  splňující  $x + y + z + 2 = xyz$  dokažte

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{2(x + y + z + 3)}.$$

*Řešení.* Na první pohled se zdá, že možná ani nebudeme substituci potřebovat, protože nerovnost vybízí k použití CS na odmocniny.

Podle CS na odmocniny platí  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3(x + y + z)}$ . To bychom pak ale potřebovali dokázat nerovnost  $\sqrt{3(x + y + z)} \leq \sqrt{2(x + y + z + 3)}$ , neboli  $x + y + z \leq 6$ , která podle jednoho z předchozích cvičení neplatí.

Substituce nám zato pomůže velmi efektivně. Nerovnost přejde na

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} &\leq \sqrt{2\left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + 3\right)} = \\ &= \sqrt{2(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}. \end{aligned}$$

Poslední rovnost je vidět, přičteme-li ke každému zlomku jedničku. Teď už můžeme slavit úspěch s toutéž myšlenkou, neboť platí

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \leq \sqrt{(b+c+c+a+a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}.$$

**Případ**  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$

Pokud vám ze substitucí vstávají vlasy hrůzou, potěší vás, že tato už je poslední, kterou se budeme zabývat. Stejně jako v případě  $x + y + z = xyz$  najdeme souvislost se světem trojúhelníků.<sup>35</sup> Protože v tomto případě bývá homogenizace mnohem obtížnější, může být goniometrická substituce opravdu dobrým východiskem.

Ukážeme nyní, že jsou-li  $\alpha, \beta, \gamma$  úhly v trojúhelníku, platí

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

---

<sup>35</sup>To, že bychom vůbec nějakou souvislost měli hledat, lze nahlédnout tak, že pokud vyřešíme rovnici  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$  jako kvadratickou rovnici vzhledem k  $z$ , dostaneme  $z = -(xy - \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2})$  (řešení je pouze jedno, protože  $z > 0$ ). Tato rovnost má stejnou strukturu jako rovnost  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ .

Za použití vztahu  $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$  a dalších známých vztahů upravujeme

$$\begin{aligned} \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \cos(\alpha + \beta) (\cos(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta) = \\ &= -\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = -\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} = \\ &= -\frac{(2 \cos^2 \alpha - 1) + (2 \cos^2 \beta - 1)}{2} = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

**Cvičení.** Rozmyslete si, že přechod od nerovnosti v proměnných  $x, y, z > 0$  s podmínkou  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$  k nerovnosti v proměnných  $\alpha, \beta, \gamma$ , jimiž jsou úhly ostroúhlého trojúhelníku, pomocí substituce

$$x = \cos \alpha, \quad y = \cos \beta, \quad z = \cos \gamma$$

je bezztrátový.

*Návod.* Nejdříve si rozmyslete, že zadanou podmínku mohou splňovat jen čísla z intervalu  $(0, 1)$ .

**Cvičení.** Nechť kladná  $x, y, z$  splňují  $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$ . Dokažte

$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} + \sqrt{\frac{2-y}{2+y}} + \sqrt{\frac{2-z}{2+z}} \geq \sqrt{3}.$$

*Návod.* Po substituci přejděte pomocí známých vzorců k polovičním úhlům.

**Cvičení.** Dokažte, že nerovnost v proměnných  $x, y, z > 0$  s podmínkou  $xy + yz + zx + 2xyz = 1$  lze bezztrátově převést na nerovnost v proměnných  $\alpha, \beta, \gamma$ , jimiž jsou úhly ostroúhlého trojúhelníku.

*Návod.*  $xy = (\sqrt{xy})^2$ .

## Úprava výrazu

Jak už jsme naznačili, v posledních letech se vyvinulo mnoho silných metod k dokazování nerovností. Většina z nich je obklopena rozsáhlou teorií a v našem seriálu se neobjeví. Potěšující je však to, že jedna z vůbec nejsilnějších metod žádnou teorii nepotřebuje. Budeme prostě jen kouzlit při úpravách a nerovnost převedeme do očividného tvaru. Věříme, že tato část seriálu patří k jeho zlatým hřebům, tak neváhejte a čtěte!

### O co tedy jde?

Začněme příklady!

**Příklad.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  ukažte

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

*Řešení.* Nerovnost ekvivalentně upravíme do tvaru

$$\frac{1}{2}(a + b + c) \left( (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right) \geq 0,$$

z něhož je platnost původní nerovnosti již zcela patrná (roznásobte si!).

**Příklad.** Pro kladná reálná čísla ukažte nerovnost

$$2 \sum_{\text{cyc}} x^7 \geq \sum_{\text{cyc}} x^5 y^2 + y^5 x^2.$$

*Řešení.* I tentokrát nám k řešení stačí nerovnost upravit, a to do tvaru

$$\sum_{\text{cyc}} (x^2 - y^2) (x^5 - y^5) \geq 0.$$

**Příklad.** Pro kladná čísla  $x, y, z$  dokažte obecnou Schurovu nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} x^\alpha (x - y)(x - z) \geq 0,$$

v níž  $\alpha$  je kladné reálné číslo.

*Řešení.* Nerovnost je symetrická, zvolme tedy bez újmy na obecnosti  $x \geq y \geq z$  a upravme ekvivalentně na

$$x^\alpha(x-y)^2 + (y-z)(x-y)(x^\alpha - y^\alpha) + z^\alpha(x-z)(y-z) \geq 0.$$

Platnost je nyní též zřejmá.

**Cvičení.** Ověřte, že naše úpravy byly správné, a uvědomte si, že upravené nerovnosti jsou skutečně již zřejmé.

*Návod.* Pro Schurovu nerovnost jsme začali úpravou  $(x-z) = (x-y) + (y-z)$ .

Tolik malá ochutnávka toho, jak se dají dokazovat nerovnosti, pokud ovládáme úpravu výrazů. Neděste se, pokud máte pocit, že na takové řešení nemůžete nikdy přijít. Vše se za pár okamžiků naučíme. Nejprve se ale rozehrějme na symetrických nerovnostech.

### Muirhead, Schur a kostičky

Jistě si vzpomenete na tu spoustu homogenních nerovností, které jsme byli schopni dokázat AG mašinkou. Matematici jsou ovšem líné bytosti a ani takto účinný nástroj jim nestačil. Chtěli vědět, kdy mohou o nějaké takové nerovnosti prohlásit, že platí, aniž by museli počítat soustavu rovnic. No a kvůli tomu vymysleli následující obecnou nerovnost. Její důkaz bude zároveň první aplikací šikových úprav. Začneme tím, že zavedeme nové značení pro symetrické nerovnosti.

**Definice.** Buďte  $a, b, c$  nezáporná celá čísla. Pak symetrický výraz

$$\sum_{\text{cyc}} (x^a y^b z^c + x^b y^a z^c), \quad \text{kde } x, y, z \in \mathbb{R},$$

budeme zkráceně značit  $[a, b, c]$ , přičemž zvykem bývá psát exponenty v sestupném pořadí, tedy tak, aby platilo  $a \geq b \geq c$ .

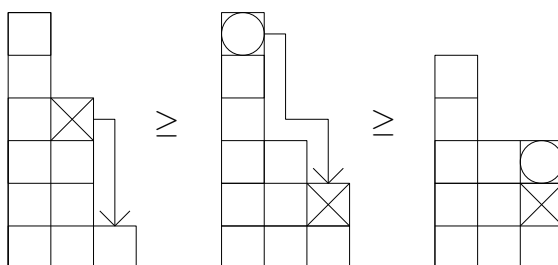
**Poznámka.** Pamatujte, že  $[a, b, c]$  je vždy součet **šesti** členů. Platí tedy například

$$[1, 1, 1] = 6xyz, \quad [3, 0, 0] = 2(x^3 + y^3 + z^3).$$

**Tvrzení.** (Muirheadova nerovnost) *Buďte  $a, b, c$  a  $a', b', c'$  nezáporná celá čísla taková, že  $a \geq b \geq c$  a  $a' \geq b' \geq c'$  a zároveň platí  $a + b + c = a' + b' + c'$ . Pak nerovnost  $[a, b, c] \geq [a', b', c']$  platí pro všechna nezáporná  $x, y, z$ , právě když  $a \geq a'$  a současně  $a + b \geq a' + b'$ .*

**Poznámka.** (O kostičkách) Předchozí neprůhledná podmínka má hezké grafické znázornění. Výraz  $[a, b, c]$  znázorníme jako tři sloupce kostiček o výškách  $a, b, c$ .

V řeči kostiček pak nerovnost  $[a, b, c] \geq [a', b', c']$  ( $a \geq b \geq c, a' \geq b' \geq c'$ ) platí, právě když můžeme od sloupečků  $[a, b, c]$  přejít k  $[a', b', c']$  jen pomocí „shazování kostiček zleva doprava“.<sup>36</sup> Například nerovnost  $[6, 4, 1] \geq [5, 3, 3]$  znázorníme takto:



<sup>36</sup>Muirheadova nerovnost ve skutečnosti platí i pro symetrické nerovnosti  $n$  proměnných, ne pouze tří. K její přesné formulaci bychom využili právě „kostičkovou interpretaci“. Dalším zobecněním je to, že exponenty  $a, b, c$  mohou být kladná reálná čísla, což ovšem ve skutečnosti Muirheadovu nerovnost nijak výrazně nezesiluje.

**Pozorování.** (SOS<sup>37</sup>) V jednom z motivačních příkladů jsme viděli, že nerovnost  $[7, 0, 0] \geq [5, 2, 0]$  lze upravit do tvaru

$$\sum_{\text{cyc}} (x^2 - y^2)(x^5 - y^5) \geq 0.$$

Podívejme se, jaké nerovnosti lze získat modifikací tohoto tvaru. Buďte  $a, b$  nezáporná celá čísla a  $c, d$  přirozená čísla. Pak zcela jistě platí nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} x^a y^a z^b (x^c - y^c)(x^d - y^d) \geq 0.$$

Ta po roznásobení přejde v

$$[a + c + d, a, b] \geq [a + c, a + d, b],$$

přičemž na uspořádání čísel  $a, b, c, d$  neklademe žádné požadavky.

**Cvičení.** Dokažte Muirheadovu nerovnost.

*Návod.*

- (i) Rozdělte důkaz na tři případy, z nichž se dá pak nerovnost sestavit. Prvním z nich bude „shazování kostičky“ z první pozice na druhou (např.  $[7, 2, 1] \geq [5, 4, 1]$ ), druhým pak z druhé pozice na třetí (např.  $[6, 4, 0] \geq [6, 2, 2]$ ) a třetím nakonec z první pozice na třetí (např.  $[2, 1, 0] \geq [1, 1, 1]$ ). Ukažte, že každou z možností umíme vyřešit pomocí SOS pozorování!
- (ii) Při důkazu opačné implikace hledejte protipříklad ve tvaru  $(x = y = 1, z = \text{„velké“})$  pro  $a' > a$  a ve tvaru  $x = 1, y = z = \text{„hodně“}$  pro  $a' + b' > a + b$ .

**Poznámka.** (Varovná!) Muirheadova nerovnost funguje opravdu jen pro symetrické nerovnosti. Například ani nerovnost  $x^5 + y^5 + z^5 \geq x^4y + y^4z + z^4x$  není jejím důsledkem, a je na ni tedy potřeba použít jiné metody (AG, permutační nerovnost apod.).

**Poznámka.** (O rovnosti) V Muirheadově nerovnosti nastává samozřejmě rovnost v případě  $x = y = z$ , ale to není všechno! Pokud v SOS pozorování volíme  $b > 0$ , nastává rovnost i pro  $x = y = 0$  a  $z$  libovolné (a cyklické záměny). Pokud volíme  $a > 0$ , pak rovnost nastává v případech  $x = y = 0, z$  libovolné a  $x = y, z = 0$  a jejich cyklických záměnách. A konečně v případě, že volíme kladné  $a$  i  $b$ , nastává rovnost ještě v případech, kdy je jedna z proměnných nulová a ostatní libovolné.

Předchozí poznámka ukazuje, že užití Muirheadovy nerovnosti není omezené pouze na nerovnosti, v nichž nastává běžná rovnost  $x = y = z$ , což jen dokládá její sílu. Na druhou stranu lze tušit, že vyšetřování rovnosti je u Muirheadovy nerovnosti ošemetné a rozhodně jej nesmíme podcenit.

**Cvičení.** Tvrzení o rovnosti ověřte pomocí SOS pozorování.

Než se vrhneme na sadu příkladů, ukažme si ještě jeden hodně obecný tvar Schurovy nerovnosti.

---

<sup>37</sup>Tuto podivnou zkratku brzy osvětlíme.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

**Tvrzení.** (Schurova nerovnost) *Pro nezáporná čísla  $x, y, z$  a kladná čísla  $\alpha, \beta$  platí nerovnost*

$$\sum_{\text{cyc}} x^\alpha (x^\beta - y^\beta) (x^\beta - z^\beta) \geq 0,$$

*přičemž rovnost nastává v případech  $x = y = z$ ,  $x = 0, y = z$  a jejich cyklických obměnách.*

**Cvičení.** Dokažte tento tvar Schurovy nerovnosti a ukažte, že po roznásobení jej lze zapsat jako

$$[\alpha + 2\beta, 0, 0] + [\alpha, \beta, \beta] \geq 2[\alpha + \beta, \beta, 0].$$

*Návod.* Substitucí  $x' = x^\beta$  atd. převedte nerovnost na jednodušší tvar, který jsme již dokázali v úvodu sekce *Úprava výrazu*.

**Cvičení.** Pomocí Muirheada a Schura dokažte následující nerovnosti a pečlivě určete, kdy v nich nastává rovnost.

- (i)  $[12, 12, 0] + 2[12, 9, 3] + [9, 9, 6] \geq 3[11, 8, 5] + [8, 8, 8]$ ,
- (ii)  $4[5, 1, 0] + [4, 1, 1] + [2, 2, 2] \geq [4, 2, 0] + 3[3, 3, 0] + 2[3, 2, 1]$ ,
- (iii)  $3[6, 0, 0] + 2[5, 1, 0] + 2[3, 3, 0] \geq 2[4, 2, 0] + [4, 1, 1] + 4[3, 2, 1]$ ,
- (iv)  $[10, 1, 1] + 2[7, 5, 0] + [6, 3, 3] \geq [8, 2, 2] + [6, 5, 1] + [6, 4, 2] + [5, 5, 2]$ ,
- (v)  $25[6, 0, 0] + 230[5, 1, 0] + 115[4, 2, 0] + 10[3, 3, 0] + 80[4, 1, 1] \geq 336[3, 2, 1] + 124[2, 2, 2]$ .

### Roznásobování

Viděli jsme, že používáním symetrického zápisu lze i nerovnosti s mnoha členy rozumně napsat a pak kombinací Muirheada a Schura i dokázat. To je hlavní důvod, proč se velmi často vyplatí symetrické nerovnosti roznásobovat. Ve skutečnosti je to dokonce jedna z neúčinnějších metod. Není sice zrovna elegantní a nápaditá, ale zato je poměrně často funkční. V minulém dílu jsme si procvičili práci s cyklickým zápisem, což se nám při roznásobování bude hodit. Ještě si řekneme něco o násobení v symetrickém zápisu.

**Lemma.**<sup>38</sup> (O násobení) *Chceme-li vynásobit dva symetrické členy  $[a, b, c]$  a  $[a', b', c']$ , můžeme očekávat, že vyjde 36 členů, tedy 6 symetrických členů. Tak tomu skutečně bude, a tyto členy budou navíc vypadat tak, že k exponentům  $a, b, c$  jednotlivě přičteme ve všech šesti možných pořadích exponenty  $a', b', c'$  (rozmyslete si, že ono násobení opravdu takhle funguje). Platí tedy*

$$\begin{aligned} [a, b, c] \times [a', b', c'] &= \\ &= [a + a', b + b', c + c'] + [a + a', b + c', c + b'] + [a + c', b + a', c + b'] + \dots \end{aligned}$$

**Cvičení.** Předchozí Lemma sice vypadá nevzhledně, ale velmi často se zjednodušuje. Zkuste si s jeho pomocí roznásobit

- (i)  $[3, 0, 0] \times [2, 1, 0]$
- (ii)  $[4, 2, 0] \times [3, 3, 0]$
- (iii)  $([3, 0, 0] - 2[1, 1, 1])^2$

<sup>38</sup>Lemma je v matematice běžně používaný název pro pomocné tvrzení.



*Návod.* Průběžně kontrolujte, že vám odpovídá počet členů. Všimněte si též, že poslední výraz je nezáporný, a rozmyslete si, že roznásobený výraz nejde „muirheadovat“.<sup>39</sup>

Nyní jste plně připraveni k tomu, abyste si zkusili pořádné roznásobování sami. Silně doporučujeme používat symetrický, a kde to nejde, tak alespoň cyklický zápis a stále si kontrolovat, že „sedí“ počet členů. Tak tedy homogenizujte, roznásobujte a věřte, že to vyjde!

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $x, y, z$  dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz}.$$

(USAMO 1997)

**Cvičení.** Pro  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  splňující  $xyz = 1$  dokažte následující nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq 0.$$

(IMO 2005)

**Cvičení.** Dokažte, že pro nezáporná reálná čísla  $x, y, z$  taková, že  $xy + yz + zx = 1$ , platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(x+y)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

(Írán 1996)

Vzpomeňte si, že první dvě nerovnosti umíme řešit i bez roznásobení, takže se dá říci, že takhle pracný přístup není na místě. Naopak u třetí nerovnosti není mezi matematickou veřejností znám<sup>40</sup> žádný postup, který by se roznásobování zcela vyhnul. I to dokládá sílu roznásobování a Muirheadovy nerovnosti, navíc rovnost v poslední nerovnosti nastává i v nesymetrickém případě. Pokud vás ale roznásobování nebaví, zcela to chápeme a slibujeme, že odtěď dál budeme dělat už jen ony slibované „hezké úpravy“.

<sup>39</sup>To jen abyste viděli, že ani Muirhead není všemocný. Tady to ani není velké překvapení, neboť rovnost nastává ve velmi zvláštních případech (rozmyslete si).

<sup>40</sup>V době psaní tohoto seriálu skutečně nebyl. Poprvé se takový postup objevil v knize [1].

## Tvar SOS

**Definice.** O výrazu  $V(a, b, c)$  ve třech proměnných  $a, b, c$  řekneme, že jde zapsat ve tvaru SOS („Sum of squares“), pokud lze ekvivalentně upravit do tvaru

$$S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2,$$

kde  $S_a, S_b, S_c$  jsou nějaké výrazy proměnných  $a, b, c$ .

**Poznámka.** Pokud po takové úpravě bude platit, že  $S_a, S_b, S_c \geq 0$ , je tím dokázána nerovnost  $V(a, b, c) \geq 0$ .

**Příklad.** Například

$$\sum_{\text{cyc}} (x^5 - y^5)(x^2 - y^2)$$

je již téměř SOS tvarem. Stačí z každé závorky vytknout<sup>41</sup>  $(x - y)$  atd. Všechny nerovnosti z SOS pozorování umíme tedy zapsat v SOS tvaru.

**Poznámka.** Může se ovšem stát, že platnou nerovnost upravíme do SOS tvaru, a přitom nebude platit  $S_a, S_b, S_c \geq 0$ . Už třeba po Schurovu nerovnost získáme tvar

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a + b - c)(a - b)^2.$$

Takové případy budou ale velmi řídké, a navíc ani pak ještě není důvod skládat zbraně, jak později uvidíme. Ve skutečnosti je úprava do SOS tvaru v současnosti asi nejsilnější (široce použitelnou) zbraní na cyklické homogenní nerovnosti!

**Pozorování.** (Sčítání SOS) Pokud dva výrazy  $V(a, b, c)$  a  $V'(a, b, c)$  umíme zapsat ve tvaru SOS, pak tak umíme zapsat i jejich součet  $V(a, b, c) + V'(a, b, c)$ .

**Cvičení.** Rozmyslete si, že k důkazu pozorování stačí příslušné SOS tvary prostě sečíst.

**Tvrzení.** (Zásadní!) Každá homogenní (polynomická) symetrická nerovnost ve třech proměnných lze zapsat ve tvaru SOS.

**Příklad.** Kupříkladu nerovnost  $[6, 1, 0] \geq [3, 2, 2]$  zapíšeme v SOS tvaru díky šikové úpravě

$$([6, 1, 0] - [5, 2, 0]) + ([5, 2, 0] - [3, 2, 2]) \geq 0,$$

<sup>41</sup>Příslušný algebraický vzorec jistě znáte:  $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ .

po níž už umíme obě závorky zapsat ve tvaru SOS (SOS pozorování). Právě s tímto úmyslem jsme jeden člen přičítali a odečítali. Pak už snadno zapíšeme jako SOS celý součet.

**Cvičení.** Rozmyslete si, že každou roznásobenou homogenní symetrickou nerovnost půjde upravit podobně jako tu v předchozím příkladu.

**Poznámka.** Ve skutečnosti umíme takto upravit dokonce každou cyklickou nerovnost. Pro cyklické nerovnosti třetího stupně tento tvar snadno najdeme díky tomu, že umíme v SOS zapsat AG nerovnost pro tři prvky (a tedy i například  $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$ ). Vyšší stupně nás zatím nebudou zajímat.

**Cvičení.** Úpravou do SOS tvaru dokažte symetrickou nerovnost

$$[4, 0, 0] + 3[2, 2, 0] \geq 4[3, 1, 0]$$

a rozmyslete si, že Muirheadova nerovnost tu nestačí.

*Návod.* Opět přičtete a odečtete vhodné členy tak, abyste mohli využít SOS pozorování.

### Když se dva perou . . .

Již víme, že pokud do SOS tvaru umíme upravit dva výrazy, umíme totéž udělat i s jejich součtem. Tuto myšlenku využijeme při dokazování nerovností podobných té následující.

**Příklad.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte

$$(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 4 \cdot \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 13.$$

*Řešení.* Rozložme pravou stranu na  $9 + 4$ . Zatímco odhad  $(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$  nám hraje do karet, pro zbylou část levé strany platí přesně opačný odhad, než jaký bychom potřebovali. Po úpravě na

$$\underbrace{(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9}_{\geq 0} + 4 \underbrace{\left( \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} - 1 \right)}_{\leq 0} \geq 0$$

můžeme dokazovanou nerovnost vnímat jako souboj dvou dílčích nerovností. Důležité ovšem je, že každou z těchto dílčích nerovností umíme zapsat v SOS tvaru. Půjde tak tedy zapsat i celá dokazovaná nerovnost. Tím je myšlenka odhalena a úlohu nyní snadno dokončíme. Platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(b - c)^2}{bc} + 4 \sum_{\text{cyc}} -\frac{(b - c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)} = \sum_{\text{cyc}} S_a (b - c)^2 \geq 0,$$

přičemž nerovnosti  $S_a, S_b, S_c \geq 0$  dokážeme již bez mrknutí oka.

Podobné nerovnosti bývají opravdu silné (minimálně silnější než každá z dílčích), a proto velmi oceníme, že úprava výrazu je bezztrátová metoda. Běžné ztrátové postupy zde stačí málokdy.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte nerovnost

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

*Návod.* Od obou stran odečtete jedničku a upravte nerovnost tak, aby se „zápasící“ nerovnosti daly zapsat v SOS tvaru.

**Cvičení.** Ukažte, že pro kladná čísla  $a, b, c$  platí nerovnost

$$\frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(BRKOS 2009)

*Návod.*  $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ .

### Úprava do SOS

Nyní si ukážeme, jak do SOS tvaru upravovat cyklické nerovnosti se zlomky, aniž bychom je museli roznásobovat. Postup má vždy tutéž myšlenku – nerovnost rozdělíme na tři cyklické sčítance a snažíme se postupně vytýkat rozdíly. Mezikrokem tedy bude vždy tvar

$$\sum_{\text{cyc}} S'_a(b - c). \quad (\heartsuit)$$

Při takových úpravách je dobré mít na paměti, že člen  $(b - c)$  lze z nějakého (polynomického) výrazu vytknout, právě když je tento výraz pro  $b = c$  nulový. Také není nutné upravovat přímo do SOS tvaru, neboť jak víme z SOS pozorování, může stačit i tvar

$$\sum_{\text{cyc}} S'_a(b^r - c^r)(b^s - c^s), \quad \text{kde } r, s > 0.$$

Dá se říct, že výrazy  $a^n - b^n$  pro  $n > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , bohatě stačí rozložit až úplně na závěr úprav (ale o tom později). Dost řečí, je čas na příklady!

**Příklad.** Dokažte *Nesbittovu nerovnost*

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

pro  $a, b, c > 0$ .

*Řešení.* Upravujeme

$$\sum_{\text{cyc}} \left( \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) = \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b) + (a-c)}{2(b+c)} = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a-b) \left( \frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right)$$

(poslední úpravu důrazně doporučujeme si rozmyslet!). Nyní už tušíme, že i z posledních závorek bude možné vytknout  $(a - b)$  (pro  $a = b$  se rovnají), a dokončit tak úpravu na

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{(a - b)^2}{(b + c)(a + c)} \geq 0.$$

**Cvičení.** Pro  $k, l \in \mathbb{N}$  a kladná čísla  $a, b, c$  dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^{k+l}}{b^k + c^k} \geq \frac{1}{2}(a^l + b^l + c^l).$$

*Návod.* Od prvního zlomku odečtete  $\frac{1}{2}a^l$  apod. Vytýkejte rozdíly typu  $a^k - b^k$ .

V následujících cvičeních se při úpravě do tvaru (♡) v čitatelích objeví i smíšené členy (např.  $bc, b^2c$  atd.). Ty buď odhadneme (například jako  $2bc \leq b^2 + c^2, b^2c + c^2b \leq b^3 + c^3$ ), anebo (pokud to nestačí, protože odhad je na špatnou stranu či slabší nerovnost neplatí) upravujeme tak, abychom si vyrobili jen rozdíly typu SOS a čiré mocniny (např.  $2bc = b^2 + c^2 - (b - c)^2$  či  $b^2c + c^2b = b^3 + c^3 - (b + c)(b - c)^2$ ). V těžších případech mohou opět pomoci SOS rozklady Muirheadova typu.

**Cvičení.** Buď  $0 < r \leq 1$  a  $a, b, c$  kladná čísla. Pak ukažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{c^2 - ab}{a^2 + b^2 + rc^2} \geq 0.$$

*Návod.* Zde stačí člen  $ab$  odhadnout.

**Cvičení.** Upravte do SOS tvaru následující nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{b^2 + c^2 + 3a^2} \leq \frac{3}{5}$$

a o její platnost se zatím nestarejte. :)

*Návod.* Dosadte  $2bc = b^2 + c^2 - (b - c)^2$ .

Občas se stává, že nějaká nerovnost vzdoruje a nechce se jí nechat se pěkně upravit. Rozšíříme si proto náš arzenál šikovných (v tomto případě doslova trikových) úprav o tři další.

### Trikové úpravy

**Tvrzení.** („Třetinová“ úprava)

$$\sum_{\text{cyc}} (b - c) S'_a = \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} (b - c) ((S'_a - S'_b) + (S'_a - S'_c)).$$

*Důkaz.* Označme levou stranu  $L$  a upravujme pomocí vztahu  $(b - c) = (b - a) + (a - c)$

$$L = \sum_{\text{cyc}} ((b - a) + (a - c)) S'_a = \sum_{\text{cyc}} (b - c) (-S'_b - S'_c) = L'.$$

Pak už jen napíšeme  $3L = 2L + L'$  a jsme hotovi.

Tato úprava se samozřejmě hodí ve chvíli, kdy potřebujeme přejít od  $(\heartsuit)$  k SOS tvaru (rozdíly  $S'_a - S'_b$  často pomohou).

**Tvrzení.** (VS<sup>42</sup> úprava)

$$\sum_{\text{cyc}} (a - b)(a - c) V'_a = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (b - c)^2 (V'_b + V'_c - V'_a).$$

**Cvičení.** Předchozí tvrzení dokažte úpravou pravé strany, přesněji rozepsáním

$$(b - c)^2 = (b - c)((b - a) + (a - c)).$$

VS úprava vlastně říká, že tvar z levé strany umíme snadno upravit na SOS, což se nám bude hodit například po použití „třetinové“ úpravy. Všimněte si, že přechod mezi koeficienty levé a pravé strany má stejnou strukturu jako známá substituce pro strany trojúhelníka ( $a = x + y$  atd.).

Poslední úprava bude ihned jasná na příkladu, říkáme jí „přičtení nuly“. Sledujte

$$a^3b - b^3c = a^3b - a^3c + a^3c - b^3c = a^3(b - c) + c(a^3 - b^3).$$

Smysl této úpravy je též ve vytváření rozdílů.

**Cvičení.** Upravte do SOS následující výrazy

- (i)  $a^4 + b^4 + c^4 - a^3b + b^3c + c^3a$ ,
- (ii)  $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 - a^2b^2c - b^2c^2a - c^2a^2b$ ,
- (iii)  $a^4b + b^4c + c^4a - a^3b^2 - b^3c^2 - c^3a^2$ .

**Cvičení.** Rozmyslete si, že tímto postupem lze upravit každou (roznásobenou) cyklickou nerovnost do tvaru SOS.

### Když to vypadá zle ...

Nyní již budeme věřit tomu, že nerovnost do tvaru SOS upravit dokážeme. Doteď jsme museli doufat, že po úpravě bude platit  $S_a, S_b, S_c \geq 0$ , přičemž třeba již Schurova nerovnost ( $S_a = \frac{1}{2}(b + c - a)$ ) toto nesplňuje. Ukažme si nyní dvě další podmínky, které nám platnost nerovnosti  $\sum_{\text{cyc}} S_a(b - c)^2 \geq 0$  zaručí. V obou z nich předpokládáme, že dokazovaná nerovnost je tohoto tvaru a je (alespoň) cyklická.

<sup>42</sup>VS znamená Vornicu-Schur, což je podobně jako SOS jeden z hezkých tvarů, do něhož lze nerovnosti upravit. Ve VS úpravě ho naleznete na levé straně. Další vlastnosti tvaru VS jsou nad rámec tohoto textu.

**Tvrzení.** (Podmínka A – „Prostřední převáží“) *Vejměme bez újmy na obecnosti uspořádání, v němž  $b$  je prostřední prvek (přesněji  $\max(a, c) \geq b \geq \min(a, c)$ ). Pak dokazovaná nerovnost platí, jsou-li splněny podmínky*

- (i)  $S_b \geq 0$ ,
- (ii)  $S_a + S_b \geq 0$ ,
- (iii)  $S_c + S_b \geq 0$ .

**Cvičení.** Pomocí rozkladu  $(a - c)^2 = ((a - b) + (b - c))^2$  dokažte předchozí tvrzení.

**Cvičení.** Necht' výrazy  $S_a, S_b, S_c$  ( $a, b, c > 0$ ) jsou jen cyklické záměny téhož výrazu. Pomocí předchozího tvrzení dokažte příslušné nerovnosti:

- (i)  $S_a = b^r + c^r - a^r$ , kde  $r > 0$  („dvojnásobný“ Schur),
- (ii)  $S_a = ab + ac - bc$ ,
- (iii)  $S_a = (b^2 + c^2)(b + c - a)$ ,
- (iv)  $S_a = \frac{b + c - a}{2abc} - \frac{a}{(a + b)(b + c)(c + a)}$ .

Následující podmínka se hodí pouze pro symetrické nerovnosti (přesněji řečeno ukáže platnost nerovnosti pouze při jednom uspořádání).

**Tvrzení.** (Podmínka B – „Dva proti jednomu“) *Dokazovaná (symetrická) nerovnost platí, pokud jsou alespoň při jednom z uspořádání  $a \geq b \geq c, c \geq b \geq a$  splněny následující podmínky:*

- (i)  $S_b \geq 0$ ,
- (ii)  $S_c \geq 0$ ,
- (iii)  $a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$ .

**Lemma.** *Při obou uspořádáních  $a \geq b \geq c$  i  $c \geq b \geq a$  platí nerovnost*

$$\frac{a - c}{b - c} \geq \frac{a}{b}.$$

**Cvičení.** Dokažte předchozí lemma (pozor na násobení zápornými čísly) a použijte ho v důkazu podmínky B. Předtím ale vytkněte (při uspořádání  $a \geq b \geq c$ ) ze součtu  $S_b(c - a)^2 + S_a(b - c)^2$  člen  $(b - c)^2$ . Pro druhé uspořádání postupujte obdobně.

**Cvičení.** Předpokládejte, že výrazy  $S_a, S_b, S_c$ , ( $a, b, c > 0$ ) jsou opět cyklické záměny téhož výrazu, a dokažte pomocí podmínky B příslušné symetrické nerovnosti.

- (i)  $S_a = b^r + c^r - a^r$ , kde  $r > 0$ ,
- (ii)  $S_a = a^2(c + b - a)$ ,
- (iii)  $S_a = 1 - \frac{a}{b + c}$ ,
- (iv)  $S_a = \frac{2}{bc} - \frac{1}{a^2}$ , kde  $a, b, c$  jsou strany trojúhelníku.

*Návod.* Pro cvičení (iv) předpokládejte uspořádání  $c \geq b \geq a$ .

**Poznámka.** Upozorňujeme, že ani jedna z podmínek nemá tvar ekvivalence. Mohou se tedy vyskytnout (a opravdu se vyskytují) takové platné nerovnosti, které stále nebudeme umět z jejich SOS tvaru dokázat.<sup>43</sup> Ručíme vám ovšem za to, že takové nerovnosti jsou

<sup>43</sup>Sice existují i další podmínky pro platnost nerovností v SOS tvaru, ale ty už přesahují rámec tohoto seriálu. A navíc ani ty nejsou všemocné.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

mimořádně obtížné. Vždyť musí být o dost jemnější než Schur i Muirhead, aby naším sítím prošly! Běžné odhady pak už téměř vůbec nemají šanci ...

### Bijte je!

Vybaveni jednou z nejsilnějších technik k dokazování nerovností vůbec si nyní můžete zkusit dokázat ty nejdospělejší nerovnosti, které současný matematický svět zná (většina má vietnamský původ, což hovoří samo za sebe). Držte si klobouky!

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \left( \frac{a}{b+c} \right) + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}.$$

*Návod.* V SOS tvaru dokažte přímo  $S_a, S_b, S_c \geq 0$ .

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte nerovnost

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq 8a^2b^2c^2.$$

*Návod.* Napovíme, že  $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$  je jen jiný tvar Schurovy nerovnosti. Upravujte tak, aby se obě „zápasící“ nerovnosti objevily v základních tvarech. Pro SOS použijte podmínku A.

**Cvičení.** Jsou dána kladná čísla  $a, b, c$ . Nalezněte největší reálné číslo  $k$  takové, aby platila nerovnost

$$(a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + k \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 9+k.$$

*Návod.* Upravte do SOS. Volbou  $b=c$  odhadněte maximální  $k$ . K důkazu pak použijte podmínku A.

**Cvičení.** Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(x+y)^2} \geq \frac{9}{4},$$

v níž  $x, y, z$  jsou kladná čísla splňující  $xy + yz + zx = 1$ . (Írán 1996)

*Návod.* Homogenizujte, substituuje  $a = x + y$  atd. a v SOS tvaru použijte podmínku B. Při převádění do SOS se nezapomeňte elegantně zbavovat smíšených členů.

**Cvičení.** (Těžší) Dokažte následující nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{b^2+c^2+3a^2} \leq \frac{3}{5}$$

pro kladná čísla  $a, b, c$ . (Vietnam)

*Návod.* Nelekněte se komplikovanějšího SOS tvaru a použijte podmínku A.



Hölderova nerovnost<sup>44</sup>

Nyní se naučíme používat jedno zobecnění CS, kterému se říká Hölderova nerovnost.<sup>45</sup> Rovnou řekneme, že odhady, které tato nerovnost dává, patří zpravidla mezi ty nejsilnější. Jelikož jsme již odhalili, že se jedná o zobecnění CS, asi tušíte, že půjde dobře používat na zlomky a odmocniny. O co tedy jde?

**Tvrzení.** (Hölderova nerovnost) *Bud'  $n \in \mathbb{N}$  a mějme nezáporná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  a  $c_1, \dots, c_n$ . Platí následující nerovnost*

$$(a_1^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + \dots + c_n^3) \geq (a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n)^3,$$

*přičemž rovnost nastává, právě když existují reálná čísla  $\lambda, \kappa$  taková, že  $a_i = \lambda b_i = \kappa c_i$  pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*

Ano, to je přesně ta nerovnost, kterou jste měli dokázat v první seriálové sérii! Její důkaz, včetně vyšetření rovnosti, tedy najdete mezi vzorovými řešeními. Používání této nerovnosti je velmi obdobné používání CS. Zvykneme si snadno!

**Cvičení.** Pro kladná čísla dokažte následující nerovnosti:

- (i)  $(a^3 + b^3 + c^3)(1 + 1 + 1)(1 + 1 + 1) \geq (a + b + c)^3$ ,
- (ii)  $(a^3 + 1)(b^3 + 1)(c^3 + 1) \geq (abc + 1)^3$ ,
- (iii)  $(a^3 + 1 + 1)(1 + b^3 + 1)(1 + 1 + c^3) \geq (a + b + c)^3$ ,
- (iv)  $(a^3 + 1)^2(b^3 + 1) \geq (a^2 b + 1)^3$ ,
- (v)  $(a^3 + 1 + 1)^2(2 + b^3) \geq (2a + b)^3$ ,
- (vi)  $(a^3 + 1 + 1)^2(2 + b^3) \geq (a^2 + b + 1)^3$ ,
- (vii)  $(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ac + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3$ .

Nyní si ukážeme, jak se Hölderova nerovnost používá při práci s odmocninami.

**Příklad.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  ukažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

<sup>44</sup>Otto Hölder (1859–1937)

<sup>45</sup>Ve skutečnosti se tímto názvem běžně označuje jiná nerovnost, známá z matematické analýzy. My budeme používat speciální tvar tzv. zobecněné Hölderovy nerovnosti. Mezi matematiky, kteří se věnují nerovnostem, se i tomuto tvaru neřekne jinak než Hölder, proto se budeme držet tohoto názvu.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

*Řešení.* Podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \right)^2 \left( \sum_{\text{cyc}} a(a^2 + 8bc) \right) \geq (a + b + c)^3.$$

Díky tomu máme (dostatečně těsný) odhad na levou stranu a zbytek už je velmi snadný.

**Příklad.** Kladná čísla  $a, b, c$  splňují  $ab + bc + ca = 1$ . Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} \leq \frac{1}{abc}.$$

(IMO shortlist 2004)

*Řešení.* Hölderovu nerovnost použijeme následovně:

$$\left( \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a} \right) \left( \sum_{\text{cyc}} (6ab + 1) \right) (1 + 1 + 1) \geq \left( \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{1}{a} + 6b \right)^{\frac{1}{3}} \right)^3.$$

V prvních dvou závorkách můžeme použít zadanou podmínku. Zbude dokázat  $\left(\frac{1}{abc}\right)^3 \geq \frac{1}{abc} \cdot 9 \cdot 3$ , což už je snadné (opět využijte podmínku).

Základní myšlenka práce s odmocninami je, doufáme, již jasná. Další zajímavá použití této nerovnosti najdete ve cvičeních.

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

(USAMO 2002)

*Návod.* Nejprve ukažte  $a^5 - a^2 + 3 \geq a^3 + 2$ .

**Cvičení.** Buďte  $a_1, a_2, \dots, a_n$  kladná čísla. Dokažte nerovnost

$$(a_1^3 + 1) \cdots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2 a_2 + 1) \cdots (a_n^2 a_1 + 1).$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí 2001)

*Návod.* Vynásobte  $n$  Hölderových nerovností.

**Cvičení.** Pro kladná čísla  $a, b, c$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq 1.$$

*Návod.* Použijte Höldera podobně jako v prvním příkladu. Na jeho pravé straně si vyrobte  $(a^2 + b^2 + c^2)^3$ . Po roznásobení zbyde dokázat nerovnost  $3 \cdot [4, 2, 0] + [2, 2, 2] \geq [3, 3, 0] + 3 \cdot [3, 2, 1]$ .

**Cvičení.** Pro nezáporná čísla  $x, y, z$  platí  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} x \sqrt[3]{y+z} \leq 3\sqrt[3]{2}.$$

*Návod.* Postupujte jako ve druhém návodném příkladu.

### Zbraň hromadného ničení

Metoda, kterou si za chvíli popíšeme, se v angličtině nazývá *Abstract Concreteness Method*<sup>46</sup> a lze ji použít jen pro symetrické nerovnosti. My jí budeme soukromě říkat kanon na symetrické nerovnosti, protože (jak dále uvidíte) je opravdu silná. Raději hned varujeme, že na některé úlohy je „až příliš silná“. Jinak řečeno, úloha může mít nějaké snadné řešení, a pokud ji vyřešíte touto metodou, používáte ve skutečnosti mnohem silnější tvrzení. Navíc se jedná o poměrně novou metodu<sup>47</sup>, takže vám zcela nezaručujeme, že vám projde například na českých olympiádách jako „známé“ tvrzení.

Budeme uvažovat symetrické nerovnosti  $P(a, b, c) \geq 0$  třech proměnných  $a, b, c$  (tentokrát mohou být i záporné) bez podmínky a takové, že  $P$  je polynom. Nejdříve si formou cvičení rozmyslíme, že takové nerovnosti lze vždy přepsat pomocí nových proměnných

$$u = a + b + c, \quad v = ab + bc + ca, \quad w = abc,$$

což je tzv. symetrická substituce pro tři proměnné. S touto substitucí (pro dvě proměnné) jsme se setkali již v minulém dílu a myšlenka tohoto tvrzení a vlastně i celého kanonu je opravdu podobná.

Pro účely následujících cvičení si zavedeme vhodné označení. Budeme psát

$$\begin{aligned} S(m) &= a^m + b^m + c^m, \\ R(m, n) &= a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n + a^n b^m + b^n c^m + c^n a^m, \\ T(m, n, p) &= a^m b^n c^p + a^p b^m c^n + a^n b^p c^m + a^n b^m c^p + a^p b^n c^m + a^m b^p c^n, \end{aligned}$$

kde  $m, n, p \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \geq n \geq p \geq 0$ .

**Cvičení.** Polynom  $P$  lze vyjádřit jako součet nějakých násobků polynomů „typu“  $S, R, T$ .

**Cvičení.** Ukažte, že nám stačí umět pomocí  $u, v, w$  zapsat polynomy „typu“  $S$ .

*Návod.* Použijte

- (i)  $T(m, n, p) = (abc)^p R(m - p, n - p)$ ,
- (ii)  $R(m, n) = S(m)S(n) - S(m + n)$ .

**Cvičení.** Polynom  $S(m)$  lze pro každé  $m \in \mathbb{N}$  zapsat pomocí  $u, v, w$ .

<sup>46</sup>Možná ještě častějšími pojmenováními jsou *ABC method* nebo *UVW method*. Našemu pojetí nejvíce odpovídá název *UVW method*.

<sup>47</sup>Na internetovém fóru *Mathlinks* (<http://www.mathlinks.ro>) jsou první zmínky o této metodě z roku 2005.

*Návod.* Postupujte indukcí<sup>48</sup> a použijte

- (i)  $S(m) = (a + b + c)S(m - 1) - R(m - 1, 1)$ ,
- (ii)  $R(m - 1, 1) = (ab + bc + ca)S(m - 2) - T(m - 2, 1, 1) = (ab + bc + ca)S(m - 2) - abcS(m - 3)$ .

Místo polynomu  $P(a, b, c)$  dostáváme polynom  $Q(u, v, w)$ , který už sice nemusí být vůbec symetrický, zato se nám podařilo poměrně výrazně snížit jeho stupeň (stupeň polynomu značíme  $\deg$ ) v následujícím smyslu: budeme-li se na polynom  $Q(u, v, w)$  chvíli dívat jako na polynom pouze jedné proměnné  $w$  a budeme-li značit  $\deg_w Q$  stupeň  $Q$  vzhledem k  $w$ , pak jistě  $\deg_w Q \leq \frac{1}{3} \deg P$ . To proto, že  $w = abc$  je v původních proměnných stupně 3.

Vezměme teď  $u, v$  pevná a dívejme se na výraz  $Q(u, v, w)$  jako na funkci jedné proměnné  $w$ , tj.  $Q(w)$ . Představme si na chvíli, že polynom  $Q(w)$  je lineární (to nastane pro všechny polynomy  $P$  až do pátého stupně!). V druhém dílu seriálu jsme ukazovali, že potom  $Q(w)$  nabývá svých extrémů jen v krajních bodech svého definičního oboru. My sice definiční obor<sup>49</sup> neznáme, ukážeme však, že v každém jeho krajním bodě (a to pro naprosto libovolný polynom  $Q(w)$  – nemusí být jen lineární) se alespoň dvě ze tří proměnných  $a, b, c$  rovnají. To znamená, že pro polynomy  $P$  do pátého stupně nám potom bude stačit původní nerovnost dokázat bez újmy na obecnosti v případě  $b = c$ . Zda nám to pomůže i pro polynomy vyšších stupňů, rozebereme později.

### Krajní body definičního oboru

Předpokládejme, že jsme přešli od symetrického polynomu  $P(a, b, c)$  k polynomu  $Q(u, v, w)$  pomocí substituce  $u = a + b + c$ ,  $v = ab + bc + ca$ ,  $w = abc$ . Definičním oborem budeme rozumět množinu všech trojic  $(k, l, m)$ , pro něž existují reálná  $a, b, c$  taková, že

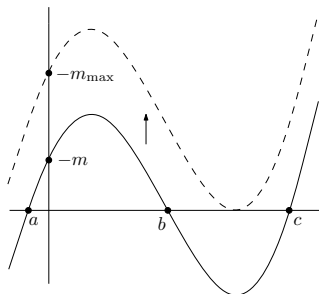
$$a + b + c = k, \quad ab + bc + ca = l, \quad abc = m.$$

Budeme se nyní zabývat „určením“ definičního oboru. Uvozovky píšeme proto, že jej vlastně ani neurčíme, ale jen zjistíme, že v každém jeho krajním bodě se musí alespoň dvě ze tří proměnných  $a, b, c$  rovnat.

Představme si, že souper nám zadal dvě reálná čísla  $k, l$ . Naším cílem je zjistit, pro jaká reálná  $m$  existují reálná čísla  $a, b, c$  taková, že  $a + b + c = k$ ,  $ab + bc + ca = l$ ,  $abc = m$ . K tomu použijeme trik s polynomelem a Viětovými vzorci. Podle nich totiž kořeny  $\alpha, \beta, \gamma$  polynomu  $R_m(x) = x^3 - kx^2 + lx - m$  splňují právě vztahy  $\alpha + \beta + \gamma = k$ ,  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = l$ ,  $\alpha\beta\gamma = m$ , a pokud jsou tato čísla reálná, jsou to hledaná  $a, b, c$ . Tím jsme úlohu přeformulovali tak, že hledaná reálná čísla  $a, b, c$  existují, právě když polynom  $R_m(x)$  má tři reálné kořeny (ne nutně různé). Předpokládejme, že pro daná  $k, l$  existuje aspoň jedno  $m \in \mathbb{R}$  takové, že  $R_m(x)$  má tři reálné kořeny. Číslem  $m$  začneme pohybovat a zajímá nás, zda má polynom  $R_m(x)$  stále tři reálné kořeny. Pomocí  $m$  měníme „výšku“ grafu funkce  $R(x)$  jako na obrázku.

<sup>48</sup>Skutečně se jedná o analogii důkazu pro dvě proměnné, ačkoliv jsme jej v sekci *Nerovnosti dvou proměnných* v minulém dílu formulovali sporem.

<sup>49</sup>O definičním oboru mluvíme proto, že zdaleka ne pro všechna čísla  $u, v, w$  existují reálná  $a, b, c$  taková, aby  $a + b + c = u$ ,  $ab + bc + ca = v$ ,  $abc = w$ . Například pro  $u = 1$ ,  $v = 1$  a  $w = 0$  příslušná  $a, b, c$  jistě najít nelze.



V průběhu pohybu (na obrázku  $-m$  zvětšujeme) se k sobě začnou nějaké dva kořeny (na obrázku  $b, c$ ) přibližovat, až nakonec pro  $m = m_{\max}$  splynou ve dvojnásobný kořen. Pokud  $-m$  ještě zvětšíme, bude mít rovnice  $R_m(x) = 0$  už jen jeden reálný kořen. Tedy právě trojice  $(k, l, m_{\max})$  je krajním bodem definičního oboru a v tomto okamžiku jsou dva kořeny stejné<sup>50</sup>.

### Zobecnění a aplikace

Zformulujeme a dokážeme několik tvrzení. Ve všech se předpokládá, že je dán symetrický polynom  $P(a, b, c)$ , z něhož substitucí získáme polynom  $Q(u, v, w)$ .

**Tvrzení.** *Je-li  $Q$  monotónní vzhledem k  $w$ , pak  $P$  nabývá extrému pro  $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ .*

*Důkaz.* Monotónní funkce (například lineární) nabývá svých extrémů v krajních bodech svého definičního oboru. Víme však, že ve všech krajních bodech definičního oboru polynomu  $Q$  se alespoň dvě z proměnných  $a, b, c$  rovnají, což lze ekvivalentně napsat jako  $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ .

Důsledkem tohoto tvrzení je fakt, že každý polynom  $P$  stupně nejvýše pět nabývá svých extrémů pro  $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ .

**Tvrzení.**

- (i) *Je-li  $Q$  konvexní vzhledem k  $w$ , pak  $P$  nabývá svého maxima pro  $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ .*
- (ii) *Je-li  $Q$  konkávní vzhledem k  $w$ , pak  $P$  nabývá svého minima pro  $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ .*

*Důkaz.*

- (i) Konvexní funkce (například kvadratická s kladným vedoucím koeficientem) může nabývat svého maxima jen v krajních bodech svého definičního oboru, proto nutně  $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ .
- (ii) Podobně konkávní funkce (například kvadratická se záporným vedoucím koeficientem) může nabývat minima jen v krajních bodech a závěr je stejný.

<sup>50</sup>Uvedený důkaz je sice „důkaz obrázkem“, ale rozhodli jsme se jej upřednostnit před důkazem exaktním, který využívá vysokoškolský aparát a přitom nemá žádnou podstatnější myšlenku.

Z tohoto tvrzení vyplývá, že každý polynom  $P$  stupně nejvýše osm nabývá svého minima nebo maxima (záleží na znaménku před  $w$ ) v případě  $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$ .

**Tvrzení.** *Je-li  $P$  symetrický polynom v proměnných  $a, b, c \geq 0$  a je-li jemu příslušný polynom  $Q$  monotónní vzhledem k  $w$ , pak  $P$  nabývá extrému pro  $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$  nebo  $abc = 0$ .*

*Analogicky platí i předchozí dvě tvrzení.*

*Důkaz.* Podmínka  $a, b, c \geq 0$  znamená, že všechny tři kořeny polynomu  $R_m$  (viz předchozí sekce) musí být nezáporné. Při hýbání číslem  $m$  se tedy může stát, že jeden z kořenů bude roven nule dříve, než zbývající dva kořeny splynou ve dvojnásobný kořen, takže potom  $w = abc = 0$ .

**Poznámka.** Často bývá podmínka  $a, b, c \geq 0$  nahrazena podmínkou  $a, b, c > 0$ . V takové situaci je rovněž bezpodmínečně nutné rozebřit případ  $abc = 0$  (intuitivně proto, že se k nule můžeme libovolně přiblížit). V momentě, kdy nerovnost dokážeme pro  $a, b, c \geq 0$ , dokázali jsme o něco více, než se po nás chtělo, takže původní nerovnost pro  $a, b, c > 0$  jistě platí.<sup>51</sup>

**Poznámka.** Všechna tvrzení jsme sice formulovali pro polynomy, ale ve skutečnosti je lze ještě o něco více zobecnit. Kanon lze použít i v případech, kdy výrazy (například zlomky, odmocniny) lze prostě jen přepsat pomocí symetrické substituce a nová funkce je vzhledem k  $w$  monotónní, resp. konvexní nebo konkávní.

Pro úplnost ještě dodejme, že ani konvexita nebo konkavita není v důkazech vlastně nijak klíčová (použili jsme je jen pro názornost a proto, že to je nejčastější případ). Obecně by nám stačila jakákoliv funkce, u níž máme jistotu, že nabývá svého maxima nebo minima v krajních bodech svého definičního oboru.

**Příklad.** Pro kladná  $a, b, c$  dokažte

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

(Írán 1996)

*Řešení.* Nerovnost je zřejmě symetrická. Po roznásobení je ekvivalentní nerovnosti

$$4(ab + bc + ca) \left( \sum_{cyc} (a+b)^2(b+c)^2 \right) - 9(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 0.$$

Samozřejmě bychom nyní mohli najít přepis do proměnných  $u, v, w$ , ale to je poměrně dost počítání. Bude stačit, když si všimneme, že velká závorka je jen čtvrtého stupně, takže bude nejvýše lineární vzhledem k  $w$ . Součin  $(a+b)(b+c)(c+a)$  je rovněž nejvýše lineární vzhledem k  $w$ . Jeho druhá mocnina je tedy vzhledem k  $w$  nejvýše kvadratická a pokud je kvadratická, tak jistě s kladným koeficientem před  $w^2$ . Proto je na levé straně

<sup>51</sup>Na první pohled ale není zcela jasné, zda si neuškodíme, protože nevíme, zda nerovnost  $P(a, b, c) \geq 0$  platná pro  $a, b, c > 0$  musí nutně platit i pro  $a, b, c \geq 0$ . Prozradíme, že nerovnost opravdu musí platit i pro  $a, b, c \geq 0$ , ale bohužel korektní zdůvodnění umíme provést jen pomocí pojmu limita, takže jej zde nebudeme uvádět.

nerovnosti funkce buď lineární vzhledem k  $w$ , nebo kvadratická vzhledem k  $w$  se záporným koeficientem před  $w^2$ . Taková funkce v obou případech nabývá svého minima jen v krajních bodech a můžeme tedy použít kanon. Stačí dokázat dva případy:

(i)  $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ . Búno<sup>52</sup>  $b = c$ , takže potřebujeme dokázat

$$4(2ab + b^2)(2(a + b)^2(2b)^2 + (a + b)^4) - 9(a + b)^4(2b)^2 \geq 0,$$

což můžeme ihned vydělit  $4(a + b)^2$ . Navíc je nerovnost stále homogenní, takže můžeme búno položit  $b = 1$ . Zbývá dokázat nerovnost jedné proměnné tvaru

$$(2a + 1)(8 + (a + 1)^2) - 9(a + 1)^2 \geq 0.$$

Ta je však velmi jednoduchá, protože je (po chvilce úprav) ekvivalentní s  $a^3 + a \geq 2a^2$ , která je zřejmá (AG).

(ii)  $abc = 0$ . Búno  $c = 0$ , takže potřebujeme dokázat

$$4ab((a + b)^2(a^2 + b^2) + a^2b^2) - 9(a + b)^2a^2b^2 \geq 0.$$

Podobným postupem jako v předchozím případě (búno  $b = 1$ ) zjistíme, že stačí dokázat jednoduchou ekvivalentní nerovnost  $4a^4 + 4 \geq a^3 + 6a^2 + a$  (opět AG).

**Poznámka.** Ne vždy je možné podobně rychle jako v předchozím příkladu nahlédnout, zda po symetrické substituci vyjde kvadratický polynom vzhledem k  $w$  s kladným nebo záporným koeficientem před  $w^2$ . Potom je bohužel potřeba celou substituci provést. Rádi bychom upozornili, že například  $a^2b^2c^2 - \sum_{\text{cyc}} a^3b^3 = -2w^2 + 3uvw - v^3$ , takže koeficient před  $w^2$  nevychází obecně stejný jako koeficient před  $a^2b^2c^2$ ! V případě nouze lze k převodům využít vztahy, které uvádíme v dodatku *Tahák k symetrické substituci*.

**Příklad.** Pro kladná  $a, b, c$  splňující  $ab + bc + ca = 1$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{2a + 2bc + 1} \geq 1.$$

**Řešení.** Představme si, že nerovnost roznásobíme. Potom na levé straně bude polynom stupně 4 a na pravé polynom stupně 6. Musíme si ale rozmyslet, jak naložíme s podmínkou ze zadání, protože kvůli ní nelze kanon přímočaře použít. Lze ale velmi snadno provést homogenizaci pomocí výrazu  $\sqrt{ab + bc + ca} = \sqrt{v} = 1$ . Po homogenizaci sice můžeme dostat funkci, která není polynomem, na druhou stranu se ale nezmění stupeň vzhledem k  $w$ . Po substituci a homogenizaci má nerovnost tvar  $0 \geq 8w^2 + A(u, v)w + B(u, v)$ , kde  $A, B$  jsou nějaké funkce proměnných  $u, v$ . Na pravé straně je zřejmě konvexní funkce. Hledáme její maximum, kterého nabývá jedině v krajních bodech definičního oboru. Díky kanonu tak stačí novou nerovnost dokázat v případech  $abc = 0$  a  $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$ . Protože je homogenizace bezztrátový proces, stačí i původní nerovnost dokázat v těchto dvou případech.

V prvním případě búno  $a = 0$  a zbývá dokázat nerovnost

$$\frac{1}{2bc + 1} + \frac{1}{2b + 1} + \frac{1}{2c + 1} \geq 1$$

<sup>52</sup>Bez újmý na obecnosti.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

za podmínky  $bc = 1$ , což ponecháváme jako cvičení. Ve druhém případě būno  $b = c$  a zbývá dokázat

$$\frac{1}{2a + 2b^2 + 1} + \frac{2}{2b + 2ab + 1} \geq 1$$

za podmínky  $2ab + b^2 = 1$ , což rovněž ponecháme jako cvičení. (Z podmínky vyjádřete  $a$ , dosadte, roznásobte a využijte, že  $b \in \langle 0, 1 \rangle$ . Nezapomeňte si hlídat znaménka.)

**Poznámka.** Jak moc nám vlastně vadí nerovnosti s podmínkou při použití kanonu? Lze obecně říci, že nám nikdy nemůže bránit taková podmínka, která lze zapsat pomocí  $u, v$ . Pokud však obsahuje i  $w$ , musíme si dát pozor, jaká funkce vznikne po homogenizaci.

**Poznámka.** Zajisté jste si všimli, že v předchozích nerovnostech nastává rovnost v ne zcela symetrických případech. Síla metody ABC je v tom, že i takovéto nepříjemné nerovnosti (standardní prostředky mají pramalou šanci) dokáže bezztrátově (!) převést na (byť občas pracné) obyčejné počítání s polynomy.

**Poznámka.** Upozorňujeme, že existují i takové symetrické nerovnosti, v nichž nastává rovnost i pro tři naprosto různá čísla. Příkladem takové nerovnosti může být  $([3, 0, 0] - 2[1, 1, 1])^2 \geq 0$ , v níž nastane rovnost například pro  $x = 1, y = 2, z = 3$ . Nelze tedy nikdy říci, že díky symetrii nerovnosti nastane rovnost v symetrickém případě.

**Cvičení.** Pro  $x, y, z > 0$  dokažte<sup>53</sup>

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx).$$

**Cvičení.** Pro libovolná (tedy ne nutně kladná!) reálná čísla  $x, y, z$  splňující  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  dokažte

$$2(x + y + z) - xyz \leq 10.$$

(Vietnam)

*Návod.* Zůstane vám polynom, který bude vypadat trochu hrůzostrašně, ale vězte, že dvojka je jeho dvojnásobným kořenem.

---

<sup>53</sup>To je přesně úloha na přemýšlení z minulého dílu.



## Cyklické nerovnosti

S cyklickými nerovnostmi se setkáváme mnohem častěji než se symetrickými, a to prostě proto, že bývají těžší. Jak jsme už viděli, na symetrické nerovnosti máme opravdu velmi silné zbraně, zatímco u těch pouze cyklických se náš arzenál značně ztenčuje. Přesto ale nejsme bezmocní, i ukažme si některé z našich možností.

### Beztrátová symetrizace

Ano, prostě se pokusíme cyklickou nerovnost převést na symetrickou, u které jsou naše šance mnohonásobně větší. Postup je sice beztrátový, ale jak už to tak bývá, za beztrátovost těžce zaplatíme.

**Tvrzení.** *Nechť  $V(a, b, c)$  je libovolný cyklický výraz v proměnných  $a, b, c$ . Potom pro všechna  $a, b, c$  platí  $V(a, b, c) \geq 0$ , právě když jsou splněny zároveň dvě nerovnosti<sup>54</sup>*

$$V(a, b, c) \cdot V(a, c, b) \geq 0, \quad V(a, b, c) + V(a, c, b) \geq 0.$$

*Důkaz.* Pokud pro všechna<sup>55</sup>  $a, b, c$  platí  $V(a, b, c) \geq 0$ , pak zřejmě i  $V(a, c, b) \geq 0$ , takže i jejich součin a součet je nezáporný.

Opačnou implikaci si uvědomíme tak, že uvážíme dvě reálná čísla  $x, y$ , jejichž součet i součin je nezáporný, tj.  $x + y \geq 0$ ,  $xy \geq 0$ . Pak musí být jistě obě nezáporná, tj.  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Místo  $x, y$  si však lze představit  $V(a, b, c)$  a  $V(a, c, b)$ .

Tato metoda sice vypadá nádherně, ale bohužel přináší jen dočasný pocit vítězství. Jednak je potřeba dokázat dvě nerovnosti a hlavně je jedna z nich dvojnásobného stupně. Každopádně není od věci metodu vyzkoušet (zvláště pokud už není jiný nápad).

### Ztrátová symetrizace

Stále bude myšlenkou přejít k symetrické nerovnosti, ale tentokrát pomocí nějakého odhadu, tedy ztrátově. To lze někdy docela jednoduše (vzpomeňte si, kolik nerovností má třeba cyklickou levou stranu, ale pravou již symetrickou), zatímco jindy je to úkol velmi obtížný.

Pro mnoho ukázek symetrizace stačí nalistovat o několik stránek zpět. Ukážeme si alespoň jeden nový trik – symetrizaci rozšířením o jmenovatel sousedního zlomku.

<sup>54</sup>Rozmyslete si, že obě nerovnosti jsou skutečně symetrické.

<sup>55</sup>Tvrzení platí zcela analogicky pro  $a, b, c > 0$ .

**Příklad.** Pro kladná  $a, b, c$  dokažte<sup>56</sup>

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{a+b}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

*Řešení.* Ukážeme si řešení, které na internetovém fóru *Mathlinks* dostalo název *the Myth solution*. Budeme chtít použít CS na odmocniny. Nyní přijde na řadu zmiňované trikové rozšíření o jmenovatel sousedního zlomku. Členy na levé straně přepíšeme jako

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} = \sqrt{(a+c) \cdot \left(\frac{a}{(a+b)(a+c)}\right)}.$$

Ze dvou možností rozšíření o  $b+c$ , nebo  $a+c$ , byla právě možnost  $a+c$  vybrána velmi pečlivě.<sup>57</sup> Po použití CS na odmocniny tedy zbyde dokázat

$$\sqrt{2(a+b+c) \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{9}{2}},$$

což už je jen symetrická nerovnost! Navíc ji můžeme rovnou roznásobit a po chvilce úprav dostaneme ekvivalentní nerovnost  $6abc \leq \sum_{\text{cyc}} (a^2b + a^2c)$ , která je velmi snadná.

**Poznámka.** Rozmyslete si, že téhož výsledku lze dosáhnout použitím Jensenovy nerovnosti pro konkávní funkci  $\sqrt{x}$ , a to opět pomocí vhodného rozšíření zlomků a vybírání váhových koeficientů. Dosud je ovšem zahaleno tajemstvím, co by v takových případech dokázala Hölderova nerovnost (je to přece zobecněná CS!). My, autoři seriálu, věříme, že potenciál Hölderovy nerovnosti v tomto směru není zdaleka vyčerpaný!

**Cvičení.** Pro kladná  $a, b, c$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}} \leq 1.$$

**Cvičení.** (Náročné<sup>58</sup>) Pro kladná  $a, b, c$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}} \leq 1.$$

*Návod.* Při důkazu symetrické nerovnosti zatněte zuby a převedte do tvaru SOS.

### Když všechno zklame ...

Ani my nevíme, jak se má nerovnost dokázat, když žádný z řady pokusů nevyjde. Snad jen snažit se vymyslet nový trik. :-)

<sup>56</sup>To je jen nepatrně upravená úloha na přemýšlení z minulého dílu.

<sup>57</sup>Tak, abychom po použití CS na odmocniny získali symetrický výraz.

<sup>58</sup>Jedná se o slabší verzi nerovnosti známé ze zahájení celostátního kola MO v roce 2009.

Příkladem nerovnosti, u které většina postupů selže, je následující nerovnost pocházející od jednoho z největších současných expertů na nerovnosti *Vasileho Cirtoajeho*.<sup>59</sup>

**Příklad.** Pro kladná  $a, b, c$  dokažte

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

*Řešení.* Vezměme známou nerovnost

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$$

platnou pro libovolná reálná čísla  $x, y, z$ . Naší snahou bude na ni napasovat dokazovanou nerovnost. To je úkol nesnadný, nicméně není těžké ověřit, že zvolíme-li

$$x = a^2 - ab + bc, \quad y = b^2 - bc + ca, \quad z = c^2 - ca + ab,$$

pak skutečně požadovanou nerovnost dostaneme.

**Poznámka.** Abychom alespoň trochu demonstrovali obtížnost předchozí úlohy, dodejme, že rovnost nenastává jen v případě  $a = b = c$ , ale rovněž pro  $a, b, c$  taková, že poměr  $a : b : c$  je  $\sin^2(4\pi/7) : \sin^2(2\pi/7) : \sin^2(\pi/7)$ . To je jeden z důvodů, proč je úloha tak těžká. Ještě ukážeme jiné důkazy, avšak není nám známa žádná rozumná metoda, jak na ně přijít. Platí<sup>60</sup>

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\text{cyc}} (a^2 - b^2 - ab + 2bc - ca)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} (a^2 + b^2 - 3ab + 3ac - 2c^2)^2 + \frac{3}{4} (a^2 - ab - ac - b^2 + 2bc)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

<sup>59</sup>Rumunský profesor, který se věnuje olympiádním soutěžím a především nerovnostem.

<sup>60</sup>První identita je v podstatě první předvedený důkaz, neboť je důsledkem rovnosti  $(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = 1/2 \cdot ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)$ .

## Úlohy na přemýšlení

Nejtěžší z nejtěžších! Ukažte, že jste se něco naučili, a vyřešte nějakou z těchto dábelkých nerovností!

**Příklad.** Kladná čísla  $a, b, c$  splňují  $\min(a, b, c) \geq \frac{1}{4} \max(a, b, c)$ . Dokažte

$$(ab + bc + ca) \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(a+b)^2} \right) \geq \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

**Příklad.** Jsou dána reálná čísla  $a, b, c$  splňující  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Určete maximální možnou hodnotu výrazu

$$|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|.$$

(IMO 2006)

**Příklad.** Dokažte, že pro libovolná kladná čísla  $a, b, c$  platí<sup>61</sup>

$$\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{bc}{4b^2 + c^2 + 4a^2} + \frac{ca}{4c^2 + a^2 + 4b^2} \leq \frac{1}{3}.$$

---

<sup>61</sup>Ano, to je ta slavná nerovnost zmíněná hned na úvod v prvním dílu a probíraná na slavnostním zahájení celostátního kola MO v roce 2009! (<http://cgi.math.muni.cz/~rvmo/ABC/58/A58iip.pdf>)

## Zadání 3. seriálové série

**Úloha 7.** Pro nezáporná  $a, b, c$  splňující  $a + b + c = 1$  dokažte

$$\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

**Úloha 8.** Pro nezáporná čísla  $a, b, c$  taková, že  $ab + bc + ca \neq 0$ , dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

(Peter Scholze, Darij Grinberg)

**Úloha 9.** Pro kladná  $a, b, c$  splňující  $a + b + c = 1$  dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

(Čína 2006)



# Řešení 3. seriálové série

Každé řešení je doplněno o poznámku obsahující drobná dovysvětlení, upozorňující na kroky, které činily problémy, apod. Poznámky vznikly na základě řešení zaslaných řešiteli MKS.

**Úloha 7.** Vzhledem k tomu, že nerovnost je symetrická, použijeme substituci

$$u = a + b + c = 1, \quad v = ab + bc + ca, \quad w = abc.$$

Symetrické výrazy vystupující v nerovnosti vyjádříme jako

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = u^2 - 2v = 1 - 2v, \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) = v^2 - 2uw = v^2 - 2w. \end{aligned}$$

Nerovnost lze poté přepsat v proměnných  $u, v, w$  jako

$$\frac{v}{1 - 2v} \geq 8(v^2 - 2w).$$

Protože podmínka  $u = 1$  nijak nespojuje proměnnou  $w$ , bude tato nerovnost i po homogenizaci stále jen lineární v proměnné  $w$  a můžeme použít kanon ( $UVW$  metodu). To je přímočará cesta popsaná v seriálu.

Ve skutečnosti ale ani nepotřebujeme takto silný nástroj, stačí nerovnost ekvivalentně upravit

$$\begin{aligned} v - 8(v^2 - 2w)(1 - 2v) &= v - 8v^2 + 16v^3 + 16w - 32vw = \\ &= v(1 - 4v)^2 + 16w(1 - 2v) \geq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je zřejmá, neboť  $v, w \geq 0$  a  $1 - 2v = a^2 + b^2 + c^2 > 0$  (vzhledem k podmínce  $u = 1$  nemohou být všechna  $a, b, c$  nulová).

Zbývá vyšetřit, kdy nastává rovnost. Nutně je  $w = abc = 0$ , buďto  $c = 0$  a zároveň je buďto  $v = 0$ , nebo  $1 - 4v = 0$ . V případě  $v = 0$  dostáváme  $ab + b \cdot 0 + 0 \cdot a = ab = 0$ . Z podmínky  $u = 1$  tak vidíme, že rovnost nastává pro trojici  $(1, 0, 0)$  a cyklické záměny. V případě  $1 - 4v = 0$ , tj.  $ab = 1/4$ , využijeme známou nerovnost

$$1 = (a + b)^2 \geq 4ab = 1,$$

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

z níž vidíme, že  $ab = 1/4$ , právě když  $a = b = 1/2$ . Rovnost tedy nastává i pro trojici  $(1/2, 1/2, 0)$  a cyklické záměny.

**Poznámka.** Nerovnost nebyla technicky náročná, takže i při použití kanonu (kdy se musí diskutovat dvě varianty) vychází odhady s velkou rezervou.

Při vyšetřování rovnosti řešitelé někdy odvodili nutné podmínky pro rovnost, ale nebylo zcela vidět, že ve všech případech rovnost opravdu nastává. Vždy se hodí dodat, že rovnost tehdy a tehdy skutečně nastává.

**Úloha 8.** Nerovnost nejdříve ekvivalentně upravíme do SOS tvaru. Protože platí

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} - 2 \right) &= \sum_{\text{cyc}} \frac{(a^2-c^2) + (b^2-c^2)}{c^2+ab} = \\ &= \sum_{\text{cyc}} (a^2-c^2) \left( \frac{1}{c^2+ab} - \frac{1}{a^2+bc} \right) = \sum_{\text{cyc}} (a^2-c^2) \frac{a^2-c^2+bc-ab}{(c^2+ab)(a^2+bc)} = \\ &= \sum_{\text{cyc}} (a-c)(a+c) \frac{(a-c)(a+c-b)}{(c^2+ab)(a^2+bc)} = \\ &= \sum_{\text{cyc}} (a-c)^2 \frac{(a+c)(a+c-b)(b^2+ca)}{(c^2+ab)(a^2+bc)(b^2+ca)}, \end{aligned}$$

stačí dokázat ekvivalentní nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} (a-c)^2 (a+c)(a+c-b)(b^2+ca) \geq 0.$$

Díváme-li se na výraz na levé straně ve tvaru  $\sum_{\text{cyc}} (a-c)^2 S_b$ , máme

$$\begin{aligned} S_a &= (c+b)(c+b-a)(a^2+bc), \\ S_b &= (a+c)(a+c-b)(b^2+ca), \\ S_c &= (b+a)(b+a-c)(c^2+ab). \end{aligned}$$

Protože je nerovnost symetrická, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat  $a \geq b \geq c$  a můžeme použít podmínku B ze seriálu. Stačí tedy ukázat  $S_b \geq 0$ ,  $S_c \geq 0$ ,  $a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$ . Nerovnosti  $S_b \geq 0$ ,  $S_c \geq 0$  jsou však vzhledem k uspořádání  $a \geq b \geq c$  zřejmé. Označíme-li

$$\begin{aligned} k &= a^2(a+c)(b^2+ca) = (a+c)(a^2b^2+a^3c), \\ l &= b^2(c+b)(a^2+bc) = (b+c)(a^2b^2+b^3c), \end{aligned}$$

pak je díky zvolenému uspořádání  $k \geq l \geq 0$  a potom

$$a^2 S_b + b^2 S_a = k(a+c-b) + l(b+c-a) = (k-l)(a-b) + (k+l)c \geq 0,$$

čímž je nerovnost (s využitím znalostí ze seriálu) dokázána.



### ŘEŠENÍ 3. SERIÁLOVÉ SÉRIE

Abychom vyšetřili rovnost, podívejme se, jak se vlastně podmínka B používá. Předpokládejme  $b \neq c$  a zjišťujeme, kdy nastává rovnost v následujících odhadech

$$\begin{aligned} (c-b)^2 S_a + (a-c)^2 S_b + (b-a)^2 S_c &\geq (b-c)^2 S_a + (a-c)^2 S_b = \\ &= (b-c)^2 \left( S_a + \frac{(a-c)^2}{(b-c)^2} S_b \right) \geq (b-c)^2 \left( S_a + \frac{a^2}{b^2} S_b \right) \geq 0 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0. \end{aligned}$$

V prvním odhadu nastává rovnost právě tehdy, když  $(a-b)^2 S_c = 0$ . Přitom je  $S_c > 0$ , protože jinak by alespoň dvě z proměnných  $a, b, c$  musely být nulové, což zadání vylučuje. Takže rovnost v prvním odhadu nastává právě pro  $a = b$ . Pak je již vždy  $\frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{b} = 1$ , takže zbývá zjistit, kdy  $a^2 S_b + b^2 S_a = (k+l)c = 0$ . Příklad  $k+l=0$  lze vyloučit, protože jinak by opět byly alespoň dvě ze tří proměnných  $a, b, c$  nulové. Tudíž rovnost nastává jen v případě  $a = b \neq 0, c = 0$  a samozřejmě při cyklických záměnách. Nakonec předpokládejme  $b = c$ . Pak vzhledem k nerovnostem  $S_b \geq 0, S_c > 0$  nastává rovnost právě tehdy, když  $a = b = c \neq 0$ .

**Poznámka.** Na tuto úlohu šlo použít i kanon, ovšem žádnému řešiteli se jeho použití nepodařilo korektně zdůvodnit. Je potřeba si rozmyslet, že u polynomů stupně šest (a více) se při rozhodování o konvexnosti či konkávnosti vzhledem k  $w$  nestačí podívat na koeficient před členem  $a^2 b^2 c^2$ , ale je potřeba opravdu celou symetrickou substituci provést. Jako příklad uveďme polynom  $\sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 (a^2 + b^2)$ , který by se na první pohled mohl zdát být jen lineární vzhledem k  $w$  (chybí člen  $a^2 b^2 c^2$ ), ale ve skutečnosti lze ověřit, že platí

$$\sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 (a^2 + b^2) = (v^2 - 2uw)(u^2 - 2v) - 3w^2.$$

**Úloha 9.** Budeme postupovat metodou ztrátové symetrizace popsanou v seriálu. Levou stranu upravíme, rozšíříme o jmenovatel sousedního zlomku a odhadneme pomocí CS na odmocniny:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} &= \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^2 b}{a+c}} = \sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a+b) \cdot \frac{a^2 b}{(a+c)(a+b)}} \leq \\ &\leq \sqrt{2(a+b+c) \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 b}{(a+b)(a+c)} \right)}. \end{aligned}$$

Dosadíme ze zadané podmínky a po úpravě nám zbyde dokázat nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 b}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{1}{4},$$

která, ač se nezdá, je symetrická.<sup>62</sup> Bystře zpozorujeme, že po roznásobení nebude mít mnoho členů, které navíc budou nízkého stupně. Zbyde ukázat  $[3, 1, 0] \geq [2, 2, 0]$ , čímž je dobojováno (Muirheadova nerovnost).

<sup>62</sup>Zkuste si každý ze zlomků na levé straně rozšířit tak, abyste symetrizovali jmenovatel a sledujte, co se stane v čitateli.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

Díky poslednímu odhadu a faktu, že pracujeme pouze s kladnými čísly, může rovnost nastat pouze pro  $a = b = c = \frac{1}{3}$ . Pro tuto trojici rovnost skutečně nastává a tím je celá úloha dořešena.

**Poznámka.** S úlohou nebyly žádné větší problémy. Všem, kteří ji vyřešili, gratulujeme, protože pokořili úlohu z čínské olympiády z roku 2006. To je asi vůbec nejtěžší olympiáda na světě! Jsou Číňané opravdu chytřejší než Češi?

# Dodatky

## Řešení 9. úlohy na přemýšlení

**Příklad.** Dokažte, že pro libovolná kladná čísla  $a, b, c$  platí

$$\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{bc}{4b^2 + c^2 + 4a^2} + \frac{ca}{4c^2 + a^2 + 4b^2} \leq \frac{1}{3}.$$

*Řešení.* (podle *Vo Quoc Ba Can*) Dokážeme postupně dvě nerovnosti, jejichž zkombinováním a substitucí za druhé mocniny získáme tu dokazovanou. Budou to

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{c^2 - ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} \geq 0, \quad \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{4a + 4b + c} \leq \frac{1}{3}.$$

*Důkaz první nerovnosti:* V prvním kroku každý ze zlomků šikovně upravíme tak, aby v čitatelích figurovaly jen dvě proměnné. Nabízí se odečíst vždy čtvrtinu jmenovatele, čímž ovšem vyrobíme nehezke zlomky, a proto nejprve nerovnost vynásobíme čtyřmi. Upravíme tedy

$$1 - \frac{4(c^2 - ab)}{4a^2 + b^2 + 4c^2} = \frac{(2a + b)^2}{4a^2 + b^2 + 4c^2}$$

a zbývá ukázat, že součet tří takových zlomků je nejvýše tři. K odhadu překvapivě použijeme CS zlomkobijce, a to právě naopak, než jak se obvykle používá. Nalezneme tři zlomky takové, že kdybychom na ně vypustili zlomkobijce, odhadli bychom je právě výrazem, s nímž nyní pracujeme (ten totiž pravou stranu zlomkobijce silně připomíná). Zlomkobijce napíšeme takto:

$$\frac{a^2}{c^2 + 2a^2} + \frac{a^2}{c^2 + 2a^2} + \frac{b^2}{2c^2 + b^2} \geq \frac{(2a + b)^2}{4a^2 + b^2 + 4c^2}.$$

Posledním překvapením je, že teď už to přímo vyjde:

$$3 = \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{2a^2}{c^2 + 2a^2} + \frac{b^2}{2c^2 + b^2} \right) \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{(2a + b)^2}{4a^2 + b^2 + 4c^2}.$$

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

*Důkaz druhé nerovnosti:* Toto řešení má podobnou strukturu jako to předchozí – nejprve nerovnost upravíme a posléze použijeme *inverzního zlomkobijce*. Úpravu tentokrát volíme tak, abychom do čitatelů dostali smíšený člen. Vynásobme tedy nerovnost číslem  $4(a + b + c)$  a každý ze zlomků upravme:

$$\frac{4a(a + b + c)}{4a + 4b + c} - a = \frac{3ac}{4a + 4b + c}.$$

Zbývá nám dokázat

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ac}{4a + 4b + c} \leq \frac{a + b + c}{9}.$$

Podobně jako u první nerovnosti odhadujme pomocí CS zlomkobijce

$$\frac{ac}{4a + 4b + c} = \frac{ac}{(2b + c) + 2(2a + b)} \leq \frac{ac}{9} \cdot \left( \frac{1}{2b + c} + \frac{2}{2a + b} \right).$$

K dořešení celé úlohy si stačí rozmyslet, že posčítáním tří takových dvojic zlomků skutečně vyjde  $\frac{a+b+c}{9}$ . Úloha je vyřešena.

*Řešení.* (podle *Anh Dung Le*, řešitele MKS) Bez újmy na obecnosti zvolme  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$  a dokazujeme nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{a^2 + c^2 + 1} \leq 1.$$

Nyní podobně jako v třetí úloze na přemýšlení (IMO 2005) použijme CS na odhad jmenovatelů

$$(1 + 1 + b^2)(a^2 + c^2 + 1) \geq (a + b + c)^2.$$

Poté, co takto odhadneme jmenovatel každého zlomku, nám zbývá dokázat

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab(2 + b^2)}{(a + b + c)^2} \leq 1.$$

Po roznásobení přejde tato nerovnost do tvaru  $\sum_{\text{cyc}} ab^3 \leq \sum_{\text{cyc}} a^2$  neboli (po zpětné homogenizaci)  $3 \sum_{\text{cyc}} ab^3 \leq (\sum_{\text{cyc}} a^2)^2$ . To je ale přece ona nerovnost od *Vasileho Cirtogajeho* ze závěru posledního dílu seriálu!

### Tahák k symetrické substituci

V sekci věnované *zbrani hromadného ničení* jsme viděli, že často potřebujeme zjistit, jak se daný symetrický výraz ve třech proměnných zapíše pomocí základních symetrických polynomů. To může být pro výrazy vyšších stupňů velmi pracné a tak přikládáme několik užitečných identit. Nechť jsou  $x, y, z$  reálná čísla a  $u = x + y + z$ ,  $v = xy + yz + zx$ ,  $w = xyz$ . Pak platí

- (i)  $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - 2v$ .
- (ii)  $x^3 + y^3 + z^3 = u^3 - 3uv + 3w$ .
- (iii)  $x^4 + y^4 + z^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2 + 4uw$ .
- (iv)  $x^5 + y^5 + z^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2 + 5u^2w - 5vw$ .
- (v)  $x^6 + y^6 + z^6 = u^6 - 6u^4v + 6u^3w + 9u^2v^2 - 12uvw + 3w^2 - 2v^3$ .
- (vi)  $x^7 + y^7 + z^7 = u^7 - 7u^5v + 14u^3v^2 + 7u^4w^2 - 7v^3u - 21u^2vw + 7v^2w + 7uw^2$ .
- (vii)  $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = v^2 - 2uw$ .
- (viii)  $(xy)^3 + (yz)^3 + (zx)^3 = v^3 - 3uvw + 3w^2$ .
- (ix)  $(xy)^4 + (yz)^4 + (zx)^4 = v^4 - 4v^2uw + 2u^2w^2 + 4w^2v$ .
- (x)  $(xy)^5 + (yz)^5 + (zx)^5 = v^5 - 5uv^3w + 5u^2vw^2 + 5v^2w^2 - 5uw^3$ .
- (xi)  $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) = uv - 3w$ .
- (xii)  $xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2) = u^2v - 2v^2 - uw$
- (xiii)  $xy(x^3 + y^3) + yz(y^3 + z^3) + zx(z^3 + x^3) = u^3v - 3uv^2 - u^2w + 5vw$ .
- (xiv)  $x^2y^2(x + y) + y^2z^2(y + z) + z^2x^2(z + x) = uv^2 - 2u^2w - vw$ .
- (xv)  $x^3y^3(x + y) + y^3z^3(y + z) + z^3x^3(z + x) = uv^3 - 3u^2vw + 5uw^2 - wv^2$ .
- (xvi)  $(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) = 9w^2 + (u^3 - 6uv)w + v^3$ .
- (xvii)  $(x^3y + y^3z + z^3x)(xy^3 + yz^3 + zx^3) = 7u^2w^2 + (u^5 - 5u^3v + uv^2)w + v^4$ .



# Literatura a zdroje

Pokud máte zájem o další studium tohoto tématu, věřte, že arzenál metod, které jsme zde popsali, představuje ve skutečnosti jen špičku ledovce. Předkládáme vám proto seznam literatury, z níž jsme čerpali či kterou jsme se jen inspirovali. Některé materiály lze sehnat volně na internetu, jiné lze objednat přes nějaké internetové knihkupectví.

## Knižní zdroje

- [1] Vasile Cirtoaje, Vo Quoc Ba Can, Tran Quoc Anh: *Inequalities with Beautiful Solutions*, GIL Publishing House, 2009.
- [2] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu: *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2004.
- [3] Vo Quoc Ba Can, Cosmin Pohoata: *Old and New Inequalities 2*, GIL Publishing House, 2008.
- [4] Pham Kim Hung: *Secrets in Inequalities*, GIL Publishing House, 2007.
- [5] Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša: *Metody řešení matematických úloh I*, Brno, 2011.
- [6] Tran Phuong: *Diamonds in Mathematical Inequalities*, Hanoi Publishing House, 2007.
- [7] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems From the Book*, XYZ Press, 2008.

## Internetové zdroje<sup>63</sup>

- [8] Osobní stránky Vo Quoc Ba Can: <http://can-hang2007.blogspot.com/search/label/Problems>.
- [9] Matematické fórum Mathlinks (Art of Problem Solving): <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php>, <http://www.mathlinks.ro>.
- [10] Hojoo Lee, *Topics in Inequalities – Theorems and Techniques*: <http://2000clicks.com/mathhelp/TopicsInInequalitiesByHojooLee-2005-10-30.pdf>.
- [11] Thomas J. Mildorf, *Olympiad Inequalities*: <http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/MildorfInequalities.pdf>.
- [12] Pham Kim Hung, *Squares Analysis Method*: <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=55&t=80127&p=458535&hilit=squares+analysis+method#p458535>
- [13] Pham Kim Hung, *The Entirely Mixing Variables Method*: <http://www.scribd.com/doc/54311839/53172542-2006-5-Entirely-Mixing-Variable-Method-Pham-Kim-Hung>
- [14] Pham Van Thuan, *Square It!*: <http://www.math.ust.hk/excalibur/v12.n5.pdf>
- [15] Darij Grinberg, *The Vornicu-Schur Inequality and Its Variations*: <http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/VornicuS.pdf>
- [16] K. Wu: *The Rearrangement Inequality*: <http://umdrive.memphis.edu/ccrousse/public/PUTNAM/Rear.pdf>
- [17] Kiran Kedlaya: *Notes for the Math Olympiad Program*: <http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/KedlayaInequalities.pdf>

---

<sup>63</sup>Platné k 29.5. 2011.

## ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ



# Závěr

Zdá se to neuvěřitelné, ale skutečně nadešel čas loučení. Zcela jistě chceme poděkovat a zároveň poblahopřát všem nadšencům, kteří se pročetli až do konce této mimořádné porce matematiky. Na samotný závěr nezbývá než popřát, ať vás matematika neomrzí a přináší vám radost znovu a znovu, jako je tomu v případě autorů seriálu. :)

Michal Rolínek a Pavel Šalom

Michal Rolínek a Pavel Šalom  
ZDOLÁVÁNÍ NEROVNOSTÍ

Obálku navrhla a nakreslila Barbora Roskovcová  
Systémem  $\text{\TeX}$  zpracoval Jakub Opršal  
Vydala Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem – Přírodovědecká fakulta  
Rok vydání: 2011

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou. Za obsah odpovídají autoři.  
Vydání sborníku bylo podpořeno projektem z ESF To je věda, seznamte se.

© Univerzita J. E. Purkyně, 2011  
ISBN 12-345-6789-0