5. CVIČENÍ Z ADS 2, PÁTEK 12:20, ZS 23/24

Toky s panem Dinicem

1. *Rozcvička s kluby z vedlejší budovy:* V parlamentu s n poslanci je m různých klubů. Jeden poslanec může být členem mnoha různých klubů. Každý klub nyní potřebuje zvolit svého předsedu a tajemníka tak, aby všichni předsedové a tajemníci byli navzájem různé osoby (tedy aby nikdo „neseděl na více křeslech"). Navrhněte algoritmus, který zvolí všechny předsedy a tajemníky, případně oznámí, že řešení neexistuje.

2. *Dinic s celými čísly:* Jak rychle doběhne Dinicův algoritmus pro jednotkové váhy a jak rychle pro celočíselné? (Ideálně bychom chtěli, aby běžel alespoň stejně rychle jako Ford-Fulkerson. Lze dostat i lepší odhad, ale to už je bonus.)

3. *Příklady těsnosti pro Dinice:* Ukažte, že časovou složitost $O(n^2m)$ Dinice (tak jak byl ukázán na přednášce) nelze obecně zlepšit.

a) Sestrojte síť, na níž Dinicův algoritmus provede $\Omega(n)$ fází.
b) Sestrojte vrstevnatou síť, v níž hledání blokujícího toku trvá $\Omega(nm)$.
c) Bonus: Zkombinujte předchozí dva příklady a vytvořte síť, na níž Dinicův algoritmus běží v čase $\Omega(n^2m)$.

4. *Bipartitní vrcholové pokrytí:* Vrcholové pokrytí je množina vrcholů, která pokrývá všechny hrany, tedy každá hrana sousedí alespoň s jedním vrcholem z této množiny. Navrhněte algoritmus pro nalezení nejmenšího vrcholového pokrytí v bipartitním grafu. Z toho odvoďte vztah pro velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí a největšího párování v bipartitních grafech (tomuto vztahu se říká Königova věta).

5. *Míra souvislosti.* Hranová souvislost (neorientovaného) grafu je minimální počet hran, které musíme odebrat, aby se stal nesouvislým. Najděte algoritmus na zjištění hranové souvislosti pomocí toků v sítích, přičemž se snažte použít pouze $O(n)$ sítí s $O(m)$ hranami. Hodí se využít, že jde o nejmenší počet hran v nějakém řezu.

Jak řešení upravit pro vrcholovou souvislost, kde nás zajímá, kolik minimálně musíme odebrat vrcholů, aby se graf stal nesouvislým?

6. *Bonus: Zaokrouhlování matice:* Na vstupu dostaneme matici A nezáporných reálných čísel o velikosti $r \times s$. Vymyslete algoritmus, který zaokrouhlí prvky matice nahoru nebo dolů tak, že zůstanou zachovány všechny řádkové i sloupcové součty, nebo odpoví, že takové zaokrouhlení neexistuje.

(Další bonusové příklady na vyžádání u vašeho cvičícího.)