5. CVIČENÍ Z ADS 1, ČTVRTEK 15:40, LS '24

Hledání nejkratších cest a záporných cyklů s Dijkstrou, Bellmanem a Fordem

1. *Rozcvička.* Lze se v algoritmech na hledání nejkratší cesty zbavit záporných hran tím, že ke všem ohodnocením hran přičteme nějaké velké číslo K?

2. *Maximalizace minima.* Mějme mapu města ve tvaru orientovaného grafu. Každou hranu ohodnotíme podle toho, jaký nejvyšší kamion po dané ulici může projet. Po cestě tedy projede maximálně tak vysoký náklad, kolik je minimum z ohodnocení jejích hran. Jak pro zadané dva vrcholy najít cestu, po níž projede co nejvyšší náklad?

3. *Nejpravděpodobnější cesta.* Počítačovou síť popíšeme orientovaným grafem, jehož vrcholy odpovídají routerům a hrany linkám mezi nimi. Pro každou linku známe pravděpodobnost toho, že bude funkční. Pravděpodobnost, že bude funkční nějaká cesta, je dána součinem pravděpodobností jejích hran. Jak pro zadané dva routery najít nejpravděpodobnější cestu mezi nimi?

4. *Hrany na nejkratších cestách.* Vymyslete algoritmus, který nalezne všechny hrany, jež leží na alespoň jedné nejkratší cestě mezi vrcholy s a t. Můžete uvažovat varianty podle toho, jestli máme nebo nemáme záporné hrany. Předpokládejte však, že záporné cykly v grafu nejsou.

5. *Jak dědeček z MFF měnil, až vyměnil.* Směnárna obchoduje s n měnami (měna číslo 1 je koruna) a vyhlašuje matici kurzů K. Kurz K_{ij} říká, kolik za jednu jednotku i-té měny dostaneme jednotek j-té měny. Vymyslete algoritmus, který zjistí, zda existuje posloupnost směn, která začne s jednou korunou a skončí s více korunami.

6. *BF a záporné cykly.* Upravte Bellmanův-Fordův algoritmus, aby uměl detekovat záporný cyklus dosažitelný z vrcholu v_0. Uměli byste tento cyklus vypsat?

Řešení. Z přednášky víme, že pokud v grafu není záporný cyklus dosažitelný z v_0, Bellmanův-Fordův algoritmus se zastaví po n fázích (protože neexistuje otevřený vrchol). Obměnou této implikace je, že pokud existuje otevřený vrchol po n fázích, pak v grafu je záporný cyklus dosažitelný z v_0. To stačí na detekci.

Pro výpis si budeme pamatovat předchůdce každého vrcholu v poli P. Tedy při relaxaci hrany vw, pokud se sníží hodnota $h(w)$ na $h(v) + \ell(vw)$, pak nastavíme $P(w) \leftarrow v$. Když se tedy Bellmanův-Fordův algoritmus nezastaví po n fázích, podíváme se na graf předchůdců G_P, kde je hrana z w do v, pokud $P(w) = v$ (a jiné hrany tam nejsou) a najdeme tam orientovaný cyklus.

Dokážeme, že (1) v G_P bude cyklus právě tehdy, když G obsahuje záporný cyklus dosažitelný z vrcholu v_0. Navíc při tom ukážeme, že (2) libovolný cyklus v G_P odpovídá zápornému cyklu v G (s opačnou orientací hran).

Pro důkaz ekvivalence (1) nejprve dokážeme implikaci zleva doprava. Mějme tedy cyklus v G_P, který odpovídá cyklu $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ v G (s opačnou orientací hran). BÚNO (bez újmy na obecnosti) jsme hranu (v_k, v_1) relaxovali jako poslední. Podívejme se na stav ohodnocení h těsně před relaxací

(v_k, v_1). V tomto kroku BF algoritmu již máme pro každé $i = 2, \ldots, k$ nastaveno $P(v_i) = v_{i-1}$ a $h(v_i) \geq h(v_{i-1}) + \ell(v_{i-1}v_i)$ (rovnost platí v čase nastavení $h(v_i)$, nicméně $h(v_{i-1})$ se poté může snížit). Sečtením těchto nerovnic pro $i = 2, \ldots, k$ dostaneme

$$h(v_k) \geq h(v_1) + \sum_{i=2}^{k} \ell(v_{i-1}v_i)\,, \tag{1}$$

protože $h(v_2), \ldots, h(v_{k-1})$ se vyskytují právě ve dvou nerovnicích, jednou nalevo, podruhé napravo.

Těsně před relaxací hrany (v_k, v_1) platí $h(v_1) > h(v_k) + \ell(v_k v_1)$, což po použití nerovnice (1) pro $h(v_k)$ dává

$$h(v_1) > h(v_k) + \ell(v_k v_1) \geq h(v_1) + \sum_{i=1}^{k} \ell(v_{i-1}v_i)\,,$$

kde dodefinujeme $v_0 = v_k$. Z toho tedy vyplývá, že $0 > \sum_{i=1}^{k} \ell(v_{i-1}v_i)$, čili cyklus C je záporný. To dokazuje implikaci zleva doprava a také (2).

Pro důkaz implikace zprava doleva budeme předpokládat, že v grafu G je záporný cyklus dosažitelný z vrcholu v_0. Nejprve ukážeme, že pokud po n fázích existuje otevřený vrchol v, tak pro něj platí $h(v) < d(v_0, v)$, tedy jeho ohodnocení je menší než jeho vzdálenost od v_0. Toto platí, protože $h(v)$ je po fázi F_i z invariantu F z přednášky omezeno délkou nejkratšího sledu o maximálně i hranách, takže po fázi F_{n-1} máme $h(v) \leq d(v_0, v)$, protože nejkratší cesta má nejvýše $n - 1$ hran. Jelikož algoritmus otevřel v ve fázi F_n, musel mu snížit $h(v)$, což dokazuje, že po fázi F_n máme $h(v) < d(v_0, v)$.

Nyní se podíváme na graf předchůdců G_P a půjdeme z v po předchůdcích, tedy po směru hran v G_P (což je proti směru původních hran G), dokud se nezacyklíme nebo nedojdeme do v_0. Pokud se zacyklíme, máme hledaný cyklus v G_P. Pokud dojdeme do v_0, musí být $h(v_0) < 0$, protože $h(v) < d(v_0, v)$ a $h(v)$ odpovídá délce nějaké sledu z v_0, konkrétně sledu podle hran v G_P s opačnou orientací. Z $h(v_0) < 0$ vyplývá, že i v_0 má předchůdce, jdeme tedy z v_0 po směru hran v G_P, dokud se nezacyklíme. Zacyklit se nyní musíme, neboť každý vrchol má předchůdce nebo do něj nemůže vést hrana v G_P (jinými slovy, každý vrchol w má buď $h(w) < \infty$ a tedy i předchůdce, nebo $h(w) = \infty$, ale pak jsme ho nikdy nerelaxovali a tedy není předchůdce žádného vrcholu).

7. *Další varianty relaxačního metaalgoritmu.* Uvažme následující dva relaxační algoritmy:

a) Provedeme n fází, v každé zrelaxujeme všechny vrcholy s ohodnocením $h(v) < \infty$.

b) Provedeme n fází, v každé projdeme všechny hrany uv a pokud $h(v) < h(u) + \ell(uv)$, tak snížíme $h(v)$.

Spočtou tyto algoritmy vzdálenosti z v_0 na grafu bez záporných cyklů? Jakému algoritmu se podobají?

Bonusové úlohy:

8. *Dijkstra se zápornými hranami II.* Najděte příklad grafu s ohodnocenými hranami, ale bez záporných cyklů, na němž Dijkstrův algoritmus poběží exponenciálně dlouho. (Hint: příklad vyžaduje velká čísla.)

9. *„Jednoduché" nerovnice.* Pro proměnné $x_1, \ldots, x_n$ máme dánu sadu nerovnic tvaru $x_i - x_j \leq c_{ij}$, kde $c_{ij} \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta (ne nutně kladná). Jak najít nějaké řešení, tedy ohodnocení proměnných splňující všechny nerovnice, popř. zjistit, že žádné neexistuje?