3. CVIČENÍ Z ADS 1, ČTVRTEK 15:40, LS '24

BFS a DFS: bludiště, artikulace, DAGy, TU, etc. (aneb máme rádi zkratky)

1. *BFS a bipartitní grafy.* Jak pomocí BFS otestovat, jestli je zadaný neorientovaný graf bipartitní? (Může být souvislý i nesouvislý.)

2. *BFS a nejkratší cesty.* Jak upravit BFS, aby bylo možné pro každý vrchol vypsat nějakou nejkratší cestu z v_0 (počátečního vrcholu BFS)? A jak určit počet nejkratších cest z v_0 do v pro každý vrchol v při zachování lineární časové složitosti?

(Počítání s velkými čísly pro jednoduchost zvládneme v čase $O(1)$. Ostatně, jak velké mohou být ty počty nejkratších cest?)

3. *BFS pomáhá kulhavému koni.* Na jisté šachovnici žil kulhavý kůň. To je zvláštní šachová figurka, která v sudých tazích táhne jako jezdec, v lichých jako pěšec. Vymyslete algoritmus, který z jednoho zadaného políčka dokulhá na druhé na nejmenší možný počet tahů.

4. *Artikulace.* Vrchol v neorientovaného grafu G je artikulace, pokud $G - v$ má více komponent než G. Vymyslete, jak artikulace najít. Nápovědy:

- Na přednášce bylo následující lemma: *v není* artikulace $\Leftrightarrow$ pro každé dva jeho sousedy $x \neq y$ existuje kružnice, která obsahuje hrany vx a vy.
- Kdy je kořen DFS stromu artikulací?
- Kdy je obecný vrchol DFS stromu artikulací?

Dále se budeme zabývat orientovanými grafy.

5. *Paralelní plánování.* Máme velký projekt, např. chceme postavit dům. Sestavíme si závislostní graf všech činností, které jsou potřeba. U každé činnosti si poznamenáme, jak dlouho bude (nejspíš) trvat. Máme k dispozici neomezeně mnoho pracovníků, takže můžeme vykonávat libovolně činností najednou, ale musíme dodržet závislosti (tedy než začneme nějakou činnost, musí být hotové všechny činnosti, na kterých závisí). Spočítejte pro každou činnost, kdy s ní začít, abychom projekt dokončili co nejdříve.

6. *Kritické vrcholy.* O činnosti z předchozího příkladu řekneme, že je kritická, pokud by její zpomalení o libovolné $\varepsilon > 0$ způsobilo pozdější dokončení projektu (o ε). Jak najít všechny kritické vrcholy? (Tomuto se někdy říká „metoda kritické cesty“.)

7. *Jeznoznačnost TU.* Jakou vlastnost má orientovaný graf, jehož topologické pořadí (uspořádání) je jednoznačné?

Bonusové úlohy:

8. *BFS pomáhá rozbitému autu v Manhattanu.* Mějme mapu Manhattanu: čtverečkovou mřížku, křížení čar odpovídají křižovatkám, úsečky mezi nimi jednotlivým streets a avenues (z nichž některé jsou neprůjezdné kvůli dopravní zácpě). Zrovna se nám v jedné ulici porouchalo auto, nebliká mu levý blinkr (směrovka), takže může jezdit pouze rovně a odbočovat doprava. Nalezněte nejkratší cestu do servisu (pro jednoduchost je v Manhattanu jen jeden).

9. *Barvení rovinného grafu.* Mějme rovinný graf (lze ho tedy nakresit na rovinu bez křížení hran). Připomeňme, že takový graf obsahuje vrchol stupně max. pět. Obarvěte vrcholy grafu šesti barvami tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu.