Algoritmy a datové struktury 1

2/2 Z+Zk, NTIN060

pomocné slajdy k algoritmickým technikám
rozděl a panuj, dynamické programování, pravděpodobnostní analýza

Pavel Veselý (IUUK)

vesely+ads1@iuuk.mff.cuni.cz

https://iuuk.mff.cuni.cz/~vesely/vyuka/ls24/ads1.html

Rozděl (problém) **a panuj** (nad algoritmy)

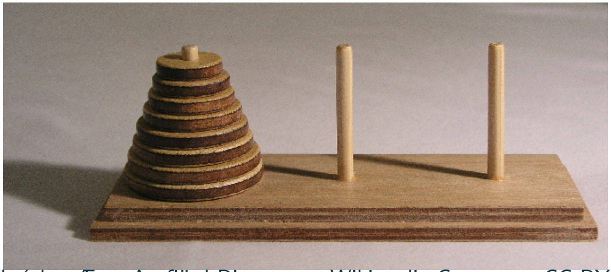
Divide et impera!

Kuchařka:

1. Rozdělíme problém na několik podproblémů
2. Pustíme algoritmus rekurzivně na každý podproblém
3. Spojíme řešení

Příklady:

- Hanojské věže



Autor obrázku: Ævar Arnfjörd Bjarmason, Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

Rozděl (problém) **a panuj** (nad algoritmy)

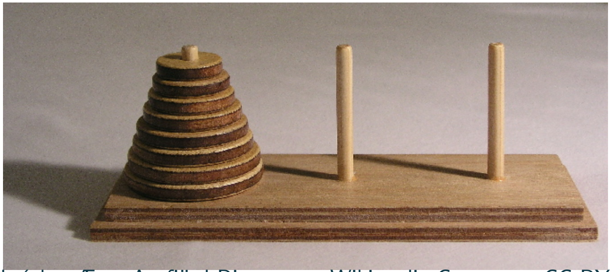
Divide et impera!

Kuchařka:

1. Rozdělíme problém na několik podproblémů
2. Pustíme algoritmus rekurzivně na každý podproblém
3. Spojíme řešení

Příklady:

- Hanojské věže



Autor obrázku: Ævar Arnfjörd Bjarmason, Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

- MergeSort — třídění sléváním
- Karacubův algoritmus pro násobení čísel
- Strassenův algoritmus pro násobení matic
- QuickSelect pro hledání k-tého nejmenšího prvku (poslední přednáška)
- QuickSort pro třídění (poslední přednáška)

Násobení n-ciferných čísel

„Školní“ algoritmus v $\Theta(n^2)$:

```
      23958233
×         5830
———————————————
      00000000 ( =      23,958,233 ×     0)
     71874699  ( =      23,958,233 ×    30)
   191665864   ( =      23,958,233 ×   800)
+ 119791165    ( =      23,958,233 × 5,000)
———————————————
  139676498390 ( = 139,676,498,390        )
```

Násobení n-ciferných čísel

„Školní“ algoritmus v $\Theta(n^2)$:

```
      23958233
×         5830
───────────────
      00000000 ( =      23,958,233 ×     0)
     71874699  ( =      23,958,233 ×    30)
   191665864   ( =      23,958,233 ×   800)
+ 119791165    ( =      23,958,233 × 5,000)
───────────────
  139676498390 ( = 139,676,498,390        )
```

Lze násobit v čase $o(n^2)$?

Násobení n-ciferných čísel

„Školní“ algoritmus v $\Theta(n^2)$:

```
     23958233
×        5830
―――――――――――――――
     00000000 ( =      23,958,233 ×     0)
    71874699  ( =      23,958,233 ×    30)
  191665864   ( =      23,958,233 ×   800)
+ 119791165    ( =      23,958,233 × 5,000)
―――――――――――――――
  139676498390 ( = 139,676,498,390        )
```

Lze násobit v čase $o(n^2)$?

1960: Kolmogorov uspořádal workshop, kde chtěl ukázat dolní odhad $\Omega(n^2)$

- Karacuba na něm našel lepší algoritmus pomocí rozděl a panuj

Násobení n-ciferných čísel

„Školní“ algoritmus v $\Theta(n^2)$:

```
        23958233
×           5830
───────────────
        00000000 ( =      23,958,233 ×     0)
       71874699  ( =      23,958,233 ×    30)
     191665864   ( =      23,958,233 ×   800)
+ 119791165      ( =      23,958,233 × 5,000)
───────────────
    139676498390 ( = 139,676,498,390        )
```

Lze násobit v čase $o(n^2)$?

1960: Kolmogorov uspořádal workshop, kde chtěl ukázat dolní odhad $\Omega(n^2)$

- Karacuba na něm našel lepší algoritmus pomocí rozděl a panuj

Je násobení „asymptoticky těžší“ než sčítání?

Násobení n-ciferných čísel

„Školní“ algoritmus v $\Theta(n^2)$:

```
       23958233
×          5830
_______________
       00000000 ( =      23,958,233 ×     0)
      71874699  ( =      23,958,233 ×    30)
    191665864   ( =      23,958,233 ×   800)
+ 119791165     ( =      23,958,233 × 5,000)
_______________
    139676498390 ( = 139,676,498,390        )
```

Lze násobit v čase $o(n^2)$?

1960: Kolmogorov uspořádal workshop, kde chtěl ukázat dolní odhad $\Omega(n^2)$

- Karacuba na něm našel lepší algoritmus pomocí rozděl a panuj

Je násobení „asymptoticky těžší“ než sčítání?

- Pomocí *rozděl a panuj* lze dosáhnout pro každé $\varepsilon > 0$ složitosti $O_\varepsilon(n^{1+\varepsilon})$
- Pomocí Fourierovy transformace: $O(n \log n)$ (ADS 2)
- Schönhage a Strassen ('71): čas $O(n)$

Násobit lze v asymptoticky stejném čase jako sčítat!

Kuchařková věta (Master Theorem)

Věta: Rekurentní rovnice časové složitosti:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) \qquad \text{a} \qquad T(k) = \Theta(1) \text{ pro } k = O(1)$$

má pro konstanty $a \geq 1, b > 1, c \geq 0$ řešení

- $T(n) = \Theta(n^c \log n)$, pokud $a/b^c = 1$
- $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, pokud $a/b^c > 1$
- $T(n) = \Theta(n^c)$, pokud $a/b^c < 1$

Strassenův algoritmus pro násobení matic ('69)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Strassenův algoritmus pro násobení matic ('69)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}); \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}; \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}); \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}); \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}; \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}); \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}$$

Zdroj obrázků: Wikimedia Commons, autor Cyp

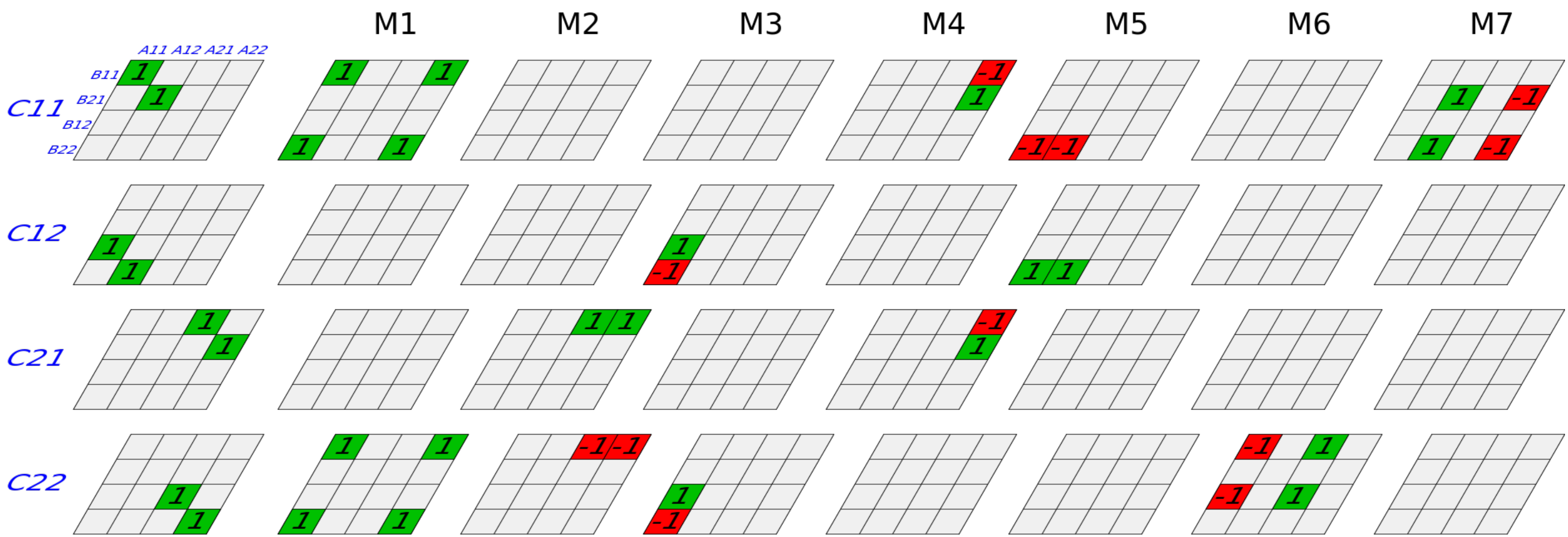
Strassenův algoritmus pro násobení matic ('69)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}); \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}; \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}); \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}); \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}; \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}); \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}$$

Zdroj obrázků: Wikimedia Commons, autor Cyp



Strassenův algoritmus pro násobení matic ('69)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}); \\ M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}; \\ M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}); \\ M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}); \\ M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}; \\ M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}); \\ M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}), \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}$$

Zdroj obrázků: Wikimedia Commons, autor Cyp

Konstanta ω: maticové násobení v čase $O(n^\omega)$ pro co nejmenší ω

- $\omega = \log_2 7 \approx 2.807$ [Strassen '69]

Strassenův algoritmus pro násobení matic ('69)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}); \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}; \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}); \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}); \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}; \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}); \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}$$

Zdroj obrázků: Wikimedia Commons, autor Cyp

Konstanta ω: maticové násobení v čase $O(n^{\omega})$ pro co nejmenší ω

- $\omega = \log_2 7 \approx 2.807$ [Strassen '69]
- ...
- $\omega < 2.37287$ [Le Gall '14]
- $\omega < 2.3728\mathbf{6}$ [Alman & Vassilevska Williams '21]
- $\omega < 2.371866$ [Duan, Wu & Zhou '23]
- $\omega < 2.371\mathbf{552}$ [Vassilevska Williams, Xu, Xu & Zhou '24]