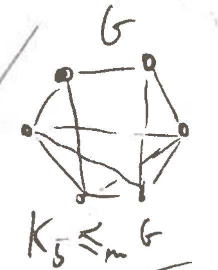
KG2 (3.) 5/

(👁)1: $G_1 \preceq_{m,t} G_2$ a $G_2 \preceq_{m,t} G_3$, pak $G_1 \preceq_{m,t} G_3$

(👁)2: $H \preceq_t G \Rightarrow H \preceq_m G$ $\Leftarrow$ obecně neplatí



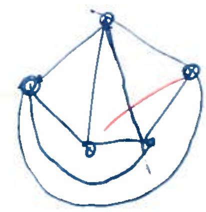
na cvičení: Lemma: Pokud max. stupeň H, $\Delta(H) \le 3$, pak $H \preceq_m G \Rightarrow H \preceq_t G$

Rovinné grafy:

Fakt(F): G rovinný a $H \preceq_{m\,(t)} G \Rightarrow H$ rovinný

Opakování: K_5 není rovinný

$K_{3,3}$ — " —



Eulerův vzorec: $G = (V, E)$ souvislý rovinný

$s = \#$ stěn nějakého rovinného nakreslení

Pak: $|V| - |E| + s = 2$

navíc: $|E| \le 3|V| - 6$

a pokud G neobsahuje $\triangle$: $|E| \le 2|V| - 4$

Věta (Kuratowski '30, Wagner '37). Pro graf G je následující ekvivalentní:

1) G je rovinný
2) G neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor
3) —— " —— jako topologický minor (podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgraf)

(1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) – fakt (F)

(2) $\Rightarrow$ (3) -- obměna (👁)2

(3) $\Rightarrow$ (2) – na cvičení

(2) $\Rightarrow$ (1) .. dokážeme

KG2 (?) 6/

(2.) ⇒ (1) – indukcí dle $|V(G)|$ .. pokud $|V(G)| \leq 4$ ✓ K_4

jinak $|V(G)| > 4$:

případy: - $k_v(G) = 0$ .. z I.P. nakreslíme komponenty zvlášť dost daleko od sebe

- $k_v(G) = 1$ .... v = artikulace

$C_1 \ldots C_\ell$ = komponenty $G \setminus v$

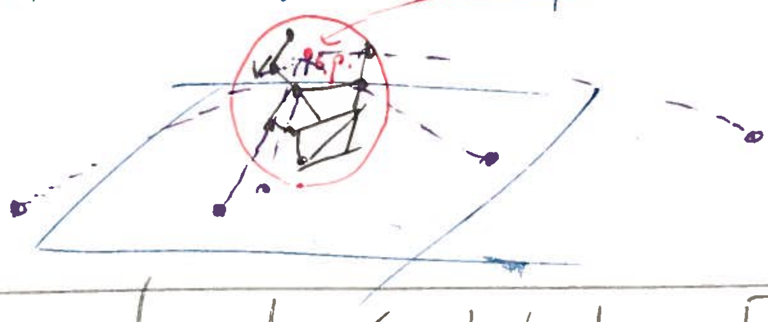
$G_1 = G[C_1 \cup \{v\}]$, $G_2 = G[C_2 \cup C_3 \cup \ldots C_\ell \cup \{v\}]$

I.P. ⇒ ∃ nakreslení G_i do roviny.

spojíme nakreslení G_i ve v ⟵ navíc: ∃ takové nakreslení, že v leží na vnější stěně

Lemma: Nechť G je rovinný. Pak pro lib. vrchol v (hranu e) ∃ nakreslení do roviny t.ž. v (nebo e) leží na vnější stěně.

důk.: nakreslíme G na kouli t.ž. v leží u stěny obsahující „severní pól"
(neformální)



↳ lepší obrázek ve [VM]

$k_v(G) = 2$: u, v = vrcholový řez, $C_1 \ldots C_\ell$ = komponenty $G \setminus \{u, v\}$

$G_1 = G[C_1 \cup \{u,v\}] + uv$, $G_2 = G[C_2 \cup \ldots \cup C_\ell \cup \{u,v\}] + uv$

- $G_1 \preceq_m G$, $G_2 \preceq_m G$

- $K_5, K_{3,3} \not\preceq_m G \Rightarrow K_5, K_{3,3} \not\preceq_m G_i$ $(i = 1,2)$

I.P. a Lemma ---

KG2 (3.) 7/

$k_v(G) \geq 3$ ~ Lemma: V lib. rovinném nakreslení vrcholově 2-souvislého grafu je hranicí každé stěny kružnice v G

(dk.: - pomocí ušatého lemmatu (neformálně) indukcí dle # hran

- G cyklus ✓
- G dostaneme z H přidáním cesty P (hrany + podrozdělení)

I.P. ⇒ tvrzení platí pro H

- P rozdělí stěnu H na 2 kružnice □

nutná podmínka 2-souvislosti

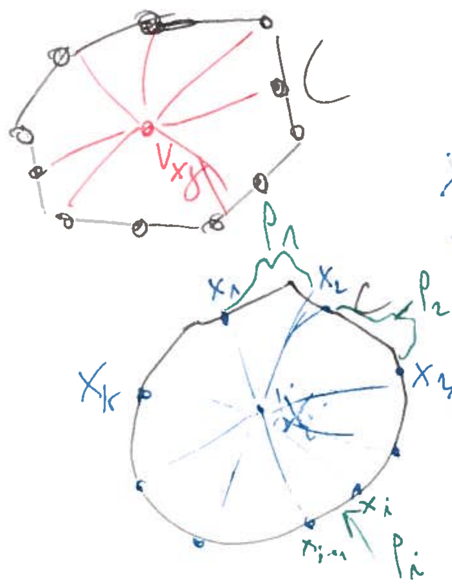
Lemma neplatí pro vnější stěnu

Lemma KH ⇒ $\exists xy \in E(G)$: G/xy je 3-souv.

I.P. ⇒ G/xy má rovinné nakreslení

$K_5, K_{3,3} \not\preceq_m G \Rightarrow K_5, K_{3,3} \not\preceq_m G/xy$

- Smažeme v_{xy} ... $(G/xy) \setminus v_{xy}$ 2-souvislý ⇒ (lemma) stěna nakreslení $(G/xy) \setminus v_{xy}$ odpovídá kružnici C

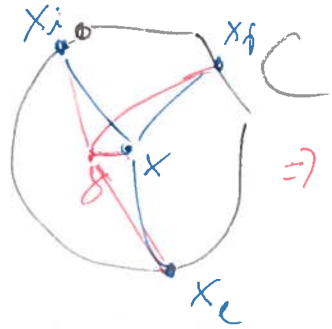


$x_1 \ldots x_k$ sousedé x kromě y (v G)

- musí ležet na C
- v cyklickém pořadí na C

← nakreslení $G \setminus y$ (z nakreslení G/xy)

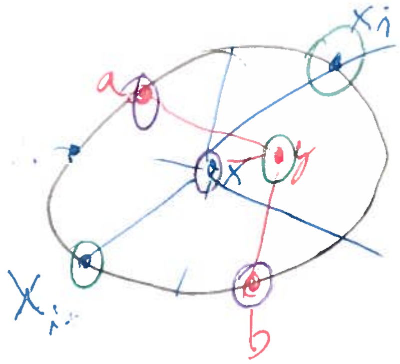
a) x a y mají ≥ 3 společné sousedy



x_i, x_j, x_l ⇒ $K_5 \preceq_m G$

KG2 (3) 8/

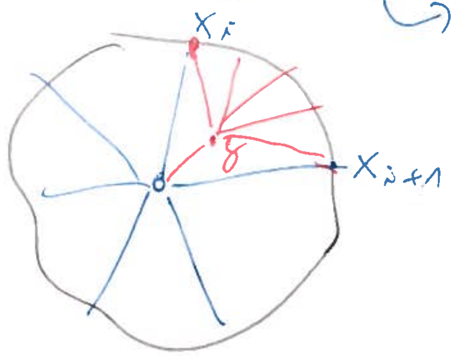
b) y má 2 sousedy $a, b \in V(C)$ t. ž. mezi a, b na C leží ≥ 1 soused x



$K_{3,3} \preceq_m G$

c) jinak $\forall$ sousedé y leží mezi x_i a x_{i+1}

$\hookrightarrow \exists$ rovinný nakreslení G



iG2 (4) 1/

def.: **plocha** P = souvislá 2-dimenzionální kompaktní varieta bez hranice ($P \subseteq \mathbb{R}^d$)
↳ neformální

2D varieta bez hranice =
= $\forall$ bod x má okolí, kt. je **homeomorfní** otevřenému kruhu

lokálně stejné jako rovina

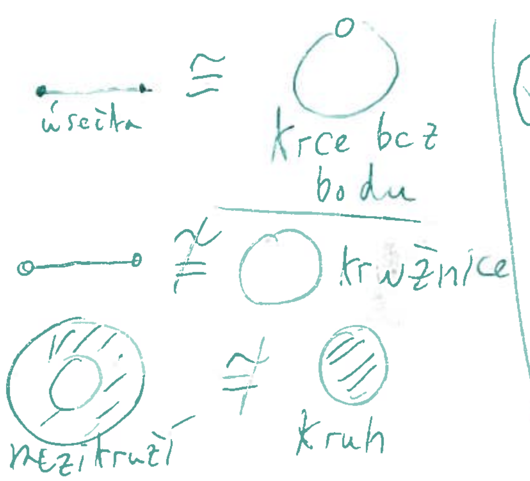
↳ homeomorfismus (topologický izomorfismus) ≐ bijekce f, spojitá t. ž. f^{-1} je spojitá

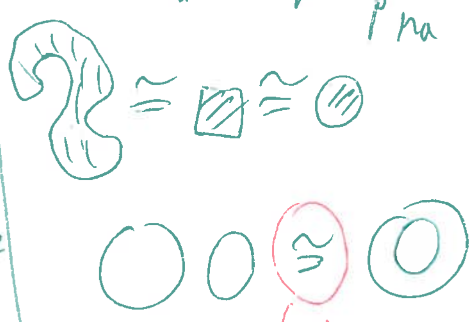
kompaktní = z každého pokrytí otevřenými množinami lze vybrat konečné pokrytí
v Eukleidovských prostorech: = omezená a uzavřená

souvislost P = P nelze vyjádřit jako sjednocení dvou oddělených množin A, B
(:: $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B) = \emptyset$)
uzávěr

P a Q homeomorfní, zn.: $P \cong Q$, pokud $\exists f: P \to Q$ homeomorfismus
↳ „lze spojitě zdeformovat P na Q"

Př.:





↳ deformaci nemusí být možné provést v rovině

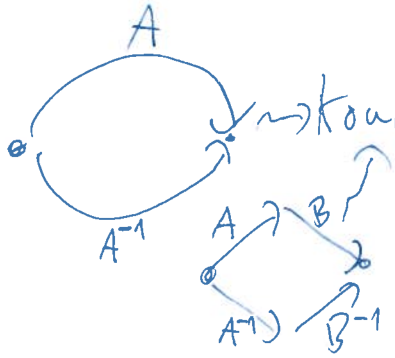
Př. ploch: sféra (povrch koule), torus (pneumatika), dvojitý torus
není plocha: rovina, otevřený kruh

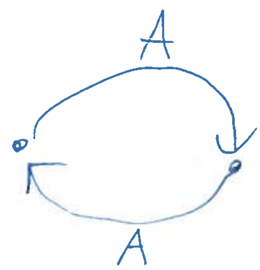
KG2 ④ 2/

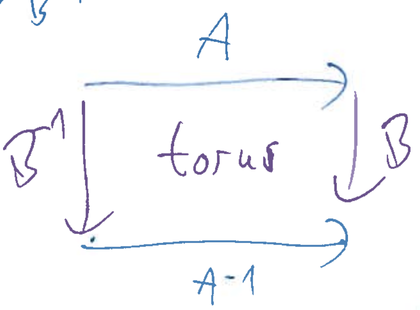
kompaktnost ⟹ plochu lze rozřezat na konečně mnoho polygonů

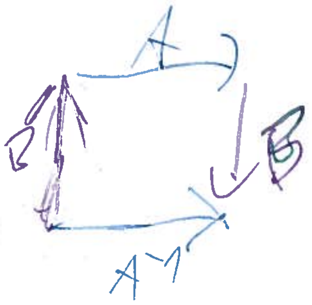
– budeme je slepovat k sobě → dostaneme 1 polygon t.ž. slepením jeho hran k sobě dostaneme plochu

Př.:









Fakt: každou plochu lze vytvořit ze sféry operacemi:

1) přidání „ucha" (madla) – vyřízneme ze sféry 2 kruhy a ztotožníme (!opačná orientace)

plášť válce

2) přidání křížítka – nelze realizovat v $\mathbb{R}^3$

– vyříznutí kruhu a nalepení Möbiova pásku