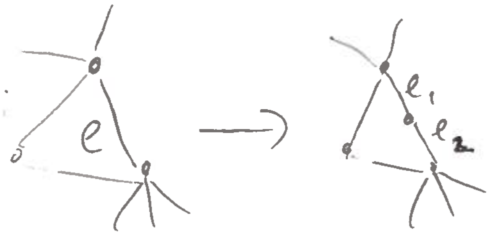
TG2 (3.) 1/

cíle: Tutteova charakterizace 3-souvislých* grafů
— " — rovinných grafů

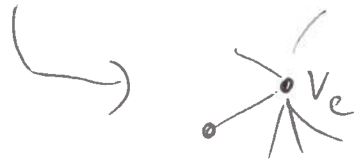
Lemma (ušaté): G je vrcholově 2-souvislý ⟺
⟺ G lze vytvořit z K_3 přidáváním
a podrozdělováním hran.

*SOUVISLOST IMPLICITNĚ VRCHOLOVÁ

operace – podrozdělení hrany: $G \% e$



– kontrakce hrany: G/e



(– mazání hran a vrcholů)

Opakování: G je vrcholově k-souvislý, pokud $\kappa_v(G) \geq k$

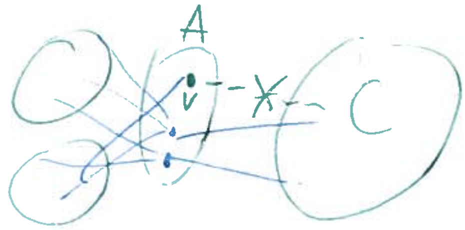
vrcholová souvislost $\kappa_v(G) = \begin{cases} n-1 & \text{pokud } G \cong K_n \ (K_1 \text{ je 1-souvislý}) \\ \min\{|A| : A \subseteq V \text{ je vrcholový řez}\} \end{cases}$

(!) k-souvislý G má min. stupeň $\geq k$ (až na K_1)

Lemma KH (o kontrahovatelné hraně): Každý vrcholově 3-souvislý graf G s ≥ 5 vrcholy obsahuje hranu e t.ž. G/e je 3-souvislý.

obecné (!): Nechť A je vrch. řez min. velikosti ($|A| = \kappa_v(G)$)
Pak $\forall v \in A$ a $\forall$ komponentu $G \setminus A$ vede alespoň 1 hrana mezi v a komponentou

dk.: sporem



$A \setminus \{v\}$ je stále řez ↯ s minimalitou A □

GG2 (3.) 2/

Dk (lemma o kontrahovatelné hraně):

Sporem: $\forall e \in E(G)$: G/e není 3-souvislý

Tvrzení (*): $\forall\ xy \in E(G)\ \exists w \in V(G)\setminus\{x,y\}$: $G\setminus\{x,y,w\}$ je nesouvislý

dk.: G/xy má ≥ 4 vrcholy $\Rightarrow$ (G/xy není 3-souv.) $\exists S \subseteq V(G/xy)$: $|S| \leq 2$

$(G/xy)\setminus S$ je nesouvislý

$v_{xy} \in S$ --- jinak S je řez v G (vrchol vzniklý kontrakcí xy)

$S' = S \setminus v_{xy} \cup \{x,y\}$. platí $G\setminus S' = (G/xy)\setminus S$

$\Rightarrow G\setminus S'$ nesouvislý

$\Rightarrow |S'| \geq 3$ (3-souv.) $\Rightarrow |S| = 2 \Rightarrow$

$\exists w \in S,\ w \neq v_{xy}$

$S' = \{x,y,w\}$ □

vybereme $xy \in E(G)$ t.ž. nejmenší komponenta C grafu $G\setminus\{x,y,w_{xy}\}$ (vrchol z tvrzení (*)) je co nejmenší

(v $G\setminus\{x,y,w_{xy}\}$ nás zajímá ta nejmenší komponenta)

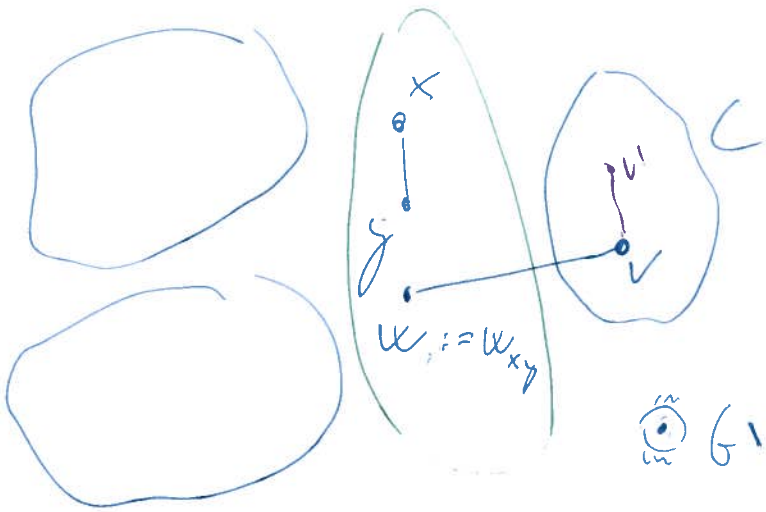
tedy: $\forall\ x'y' \in E(G)\ \forall w' \in V$: $G\setminus\{x',y',w'\}$ není souvislý platí, že $\forall$ komponenta $G\setminus\{x',y',w'\}$ má velikost $\geq |V(C)|$

$\Rightarrow w$ má souseda v v komp. C

$G/w_{xy}v$ není 3-souv.

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists u$: $G\setminus\{w_{xy}, v, u\}$ je nesouvislý

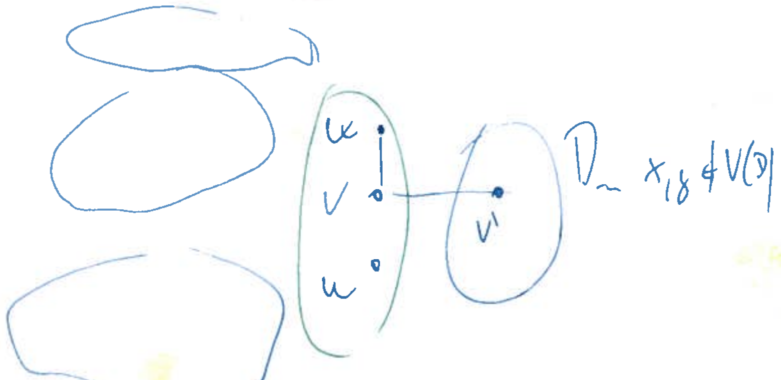
(může nastat: $u \in \{x,y\}$)



$G\setminus\{w,v,u\}$ má komponentu D t.ž. $x,y \notin V(D)$ (protože $xy \in E(G)$)

$V(D) \subseteq V(C)$

- $v' :=$ soused v v D -- z
  $x,y,w,v,u \notin V(D)$
  $\Rightarrow v' \in V(C)$
- D je komponenta $\Rightarrow V(D) \subseteq V(C)$



$v \in V(C)\setminus V(D) \Rightarrow |D| < |C|$ ↯ s volbou C □

G2 3. 3/ 1

Věta [Tutte]: G je vrcholově 3-souvislý $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists$ posloupnost grafů $G_0 \cong K_4, G_1, \dots, G_n \cong G$

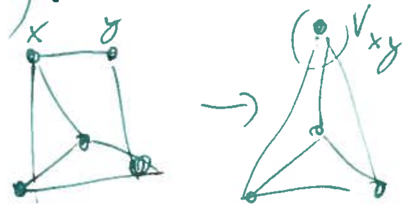
t. ž. $\forall i = 0, \dots, n-1$: G_{i+1} má hranu xy: $G_i = G_{i+1}/xy$

& $\deg_{G_{i+1}}(x), \deg_{G_{i+1}}(y) \geq 3$

$\Rightarrow$ L. o kontrahovatelné hraně (+ min. stupeň v 3-souvislém G je ≥ 3)

použití opakovaně na G

nutné:



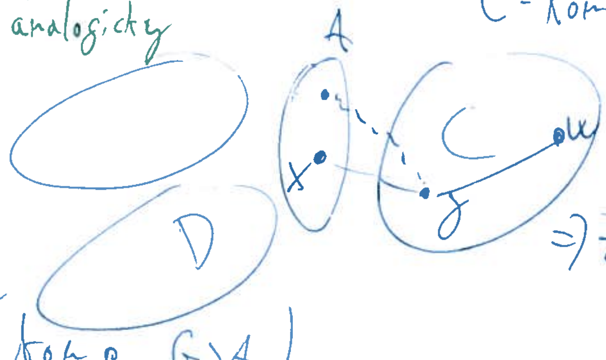
($\Leftarrow$ indukcí + ↗)

Lemma: Nechť $xy \in E(G)$ je hrana a $\deg_G(x) \geq 3$ a $\deg_G(y) \geq 3$.
Pak pokud je G/xy 3-souvislý $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ G je 3-souv.

Dk. lemma: G/xy má ≥ 4 vrcholy $\Rightarrow$ G má ≥ 5 vrcholů

$\forall A \subseteq V(G)$: $|A| = 2$: cíl: $G \setminus A$ je souvislý

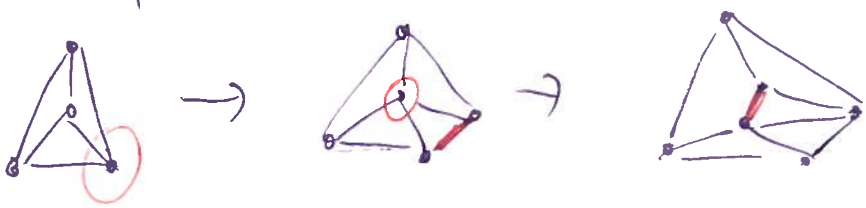
- $A \cap \{x, y\} = \emptyset$: A je řez i v $G/xy \Rightarrow$ ↯ s 3-souv.
- $A = \{x, y\}$: $G \setminus A = (G/xy) \setminus \{v_{xy}\}$ je souvislý z 3-souv. G/xy
- $A \cap \{x, y\} = \{x\}$: pokud $G \setminus A$ je nesouvislý
  (y analogicky)
  C = komponenta $G \setminus A$ obsahující y



$\deg_G(y) \geq 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists w \in V(C): yw \in E(C)$

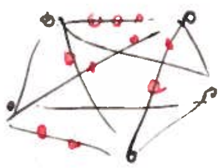
$A' = A \setminus \{x\} \cup \{v_{xy}\}$ je řez v G/xy
(odděluje $C \setminus \{y\} \neq \emptyset$ od jiné komp. $G \setminus A$)

př.: k Tutteově větě: K_4

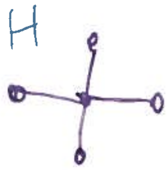
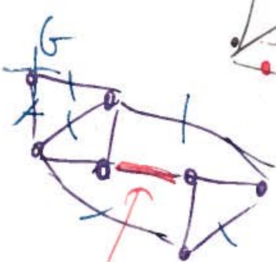


- G obsahuje H jako indukovaný podgraf, pokud H lze získat z G pomocí mazání vrcholů nebo graf izomorfní s H
- G — " — H jako podgraf, pokud — " — mazání vrcholů a hran
- G — " — H jako minor, pokud lze z G získat (izomorfní kopii) H operacemi mazání hran a vrcholů a kontrakcemi hran

  Značení: $H \preceq_m G$
- G obsahuje H jako topologický minor, pokud G obsahuje podrozdělení H jako podgraf



(operace – mazání vrcholů a hran
– nahrazení vrcholu stupně 2 hranou

př.: H  $\preceq_m$ G 

kontrakce

$\preceq_t$ – proč? H má vrchol stupně 4 a G ne

KG2 (3.) 5/

👁1: $G_1 \preceq_{\substack{m\\t}} G_2$ a $G_2 \preceq_{\substack{m\\t}} G_3$, pak $G_1 \preceq_{\substack{m\\t}} G_3$

$K_5 \preceq_m G$

👁2: $H \preceq_t G \Rightarrow H \preceq_m G$ $\Leftarrow$ obecně neplatí

---

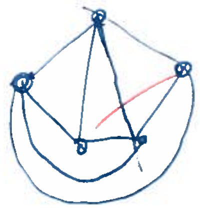
na cvičení: Lemma: Pokud max. stupeň H, $\Delta(H) \leq 3$, pak $H \preceq_m G \Rightarrow H \preceq_t G$

Rovinné grafy:

Fakt (F): G rovinný a $H \preceq_{\substack{m\\(t)}} G \Rightarrow H$ rovinný

opakování: K_5 není rovinný

$K_{3,3}$ —"—



Eulerův vzorec: $G = (V,E)$ souvislý rovinný

$s = \#$ stěn nějakého rovinného nakreslení

Pak: $|V| - |E| + s = 2$

navíc: $|E| \leq 3|V| - 6$

a pokud G neobsahuje $\triangle$: $|E| \leq 2|V| - 4$

Věta (Kuratowski '30; Wagner '37). Pro graf G je následující ekvivalentní:

1) G je rovinný
2) G neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor
3) —"— jako topologický minor (podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgraf)

(1) $\Rightarrow$ (2) fakt (F)

(1) = (3)

(2) $\Rightarrow$ (3) -- obměna 👁2

(3) $\Rightarrow$ (2) -- na cvičení

(2) $\Rightarrow$ (1) -- dokážeme