KG2 slunečnice 1/

Mějme systém množin $\mathcal{A}$

def.: Slunečnice (Δ-systém) se středem S a ℓ lístky je ℓ-tice množin $L_1, L_2, \dots, L_\ell$ t.ž. $L_i \in \mathcal{A}$ (S nemusí být v $\mathcal{A}$)

$\forall i \neq j: L_i \cap L_j = S$

$\ell \le 2$ – vždy $\exists$ (má-li ≥ 2 množiny)

Věta (Slunečnicové lemma, Erdős–Rado '60)

Nechť $k, \ell \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A}$ je množinový systém t.ž.

1) $\forall A \in \mathcal{A}: |A| = k$ – ($\mathcal{A}$ je k-uniformní hypergraf) (Věta platí i pokud $|A| \le k$)

2) $|\mathcal{A}| > (\ell-1)^k k!$

Potom $\mathcal{A}$ obsahuje slunečnici s ℓ lístky

Dk.: indukcí dle k: $k=1$ – $|\mathcal{A}| \ge \ell$ – lze vzít lib. ℓ prvků v $\mathcal{A}$

(ℓ pevné) $k>1$: $\mathcal{D}$ = největší množina po dvou disjunktních množin v $\mathcal{A}$

$\ell \le 2$ – triv.

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ – $\forall D, D' \in \mathcal{D}: D \cap D' = \emptyset$

$|\mathcal{D}| \ge \ell$ ✓ – $\mathcal{D}$ je slunečnice s prázdným středem

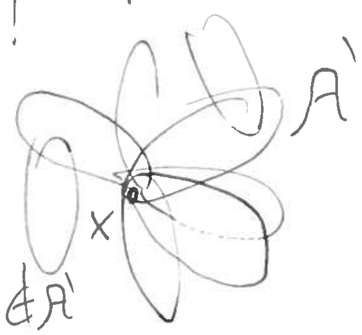
jinak: $P = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$ – – – $\Rightarrow$ $|P| \le (\ell-1)\cdot k$

↳ prvky v množinách $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ maximální $\Rightarrow$ $\forall A \in \mathcal{A}$: $\neq\emptyset$ $\exists p \in P: p \in A$

($P \neq \emptyset$ pro $k \ge 2$)

KG2 slunečnice 2/1

princip holubníku $\Rightarrow \exists x \in P$, který je obsažen v $\geq \frac{|\mathcal{A}|}{|P|} \geq \frac{|\mathcal{A}|}{(\ell-1)\cdot k}$ množinách $\mathcal{A}$



$$\mathcal{A}' = \{A \setminus \{x\} \mid A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

$$\therefore \forall A' \in \mathcal{A}' : |A'| = k-1$$

$$|\mathcal{A}'| \geq \frac{|\mathcal{A}|}{(\ell-1)\cdot k} > \frac{(\ell-1)^k \cdot k!}{(\ell-1)\cdot k} = (\ell-1)^{k-1}(k-1)!$$

I.P.: $\mathcal{A}'$ obsahuje slunečnici $\mathcal{S}'$ s ℓ lístky

$\mathcal{S} = \{S \cup \{x\} \mid S \in \mathcal{S}'\}$ je slunečnice s ℓ lístky v $\mathcal{A}$ $\square$

Hypotéza: $\forall \ell\ \exists c_\ell$ (konst. závislá na ℓ):

stačí $|\mathcal{A}| > c_\ell^{\,k}$ (tedy bez $k!$)

umí se: $|\mathcal{A}| > O(\ell \cdot \lg(k \cdot \ell))^k$

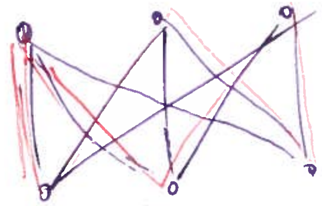
KG2 Ham. 1/

Eulerovské kružnice – opakování

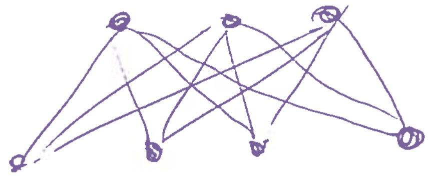
def.: Hamiltonovská kružnice (Ham. krce) v grafu G je kružnice obsahující všechny vrcholy.

– NP-těžký problém

př.:



$K_{3,3}$ je Ham.



$K_{3,4}$ není Ham.

Pozorování: Nechť G je Hamiltonovský (má Ham. krci), pak $\forall S \subseteq V(G)$: $G-S$ má $\leq |S|$ komponent.

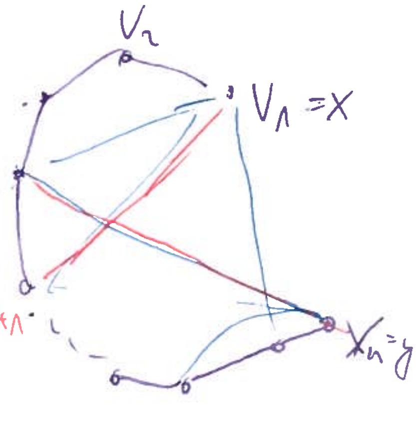
Věta (Bondy – Chvátal '76). Mějme nesousední vrcholy x, y v grafu G s $n \geq 3$ vrcholy takové, že $\deg(x) + \deg(y) \geq n$. Pak G je Hamiltonovský $\iff$ $G + xy$ je Hamiltonovský.

Dk.: $\Rightarrow$ triv.

$\Leftarrow$ nechť $G+xy$ má Ham. krci C – pokud $xy \notin E(G) \Rightarrow G$ Ham.

jinak $xy \in C$ – $C - xy$ je cesta $\underset{x}{v_1}, \dots, \underset{y}{v_n}$

Pozorování: $\exists i$ t.ž. $xv_{i+1} \in E$ a $yv_i \in E$ $\Rightarrow$ Ham. krce v G: v_i …



dk: $S_x \subseteq \{1, \dots, n-1\}$: $S_x = \{i : xv_{i+1} \in E\}$, $1 \leq i \leq n-1$

$|S_x| = \deg(x)$

$S_y \subseteq \{1, \dots, n-1\}$: $S_y = \{i : yv_i \in E\}$

$|S_y| = \deg(y)$

$|S_x| + |S_y| \geq n \Rightarrow S_x \cap S_y \neq \emptyset$ $\square$

TG2 Ham. 2/1

$G \rightsquigarrow \bar{G}$: opakované přidávání hran xy t.ž. $\deg(x) + \deg(y) \geq n$

↳ Chvátalův uzávěr

Důsledek (Ore '60): Mějme G s $n \geq 3$ vrcholy t.ž.: $\forall x, y$ nesousední: $\deg(x) + \deg(y) \geq n$

Pak G je Hamiltonovský. $\Rightarrow \bar{G} = K_n$

Důsledek důsledku (Dirac '52): G s $n \geq 3$ vrcholy a min. stupněm $\geq \frac{n}{2}$ je Hamiltonovský.