G2 VF 1 (VYTVOŘUJÍCÍ FCE A FORMÁLNÍ MOCNINNÉ ŘADY

a_n = # kombinatorických objektů velikosti n

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \rightsquigarrow A(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{\text{formální mocninná řada}}$$

př.: $(1,1,1,\dots) \rightsquigarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$

def.: Obyčejná vytvořující funkce (OVF) pro posloupnost $a_0, a_1, a_2, \dots$ je formální mocninná řada (FMŘ) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

použití: – explicitní vzorec pro A_n – (ne vždy jde snadno)
↳ nerekurzivní
– asymptotické odhady

– pro $|a_n| \le c^n$ pro $c \in \mathbb{R}$ $\forall$ (až na konečně mnoho n) konverguje řada v nějakém okolí 0

! ale: $1 + (1!)x + (2!)x^2 + (3!)x^3 + \dots n! x^n$ konverguje jen pro $x = 0$
$1 + 2^{(1^2)} x + 2^{(2^2)} x^2 + \dots + 2^{(n^2)} \cdot x^n \dots$ —— " ——

Operace $+$, $\alpha \cdot$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$, násobení, ...
↳ (inverze vůči násobení $\nexists$ pokud $a_0 \ne 0$)

KG2 VF 2/1

př.: $s_n = \#$ řetězců délky n nad abecedou $\{1,2,3\}$ k.t. neobsahují dvě '1' za sebou

'' ← prázdný řetězec, '1'

'2', '3', '12', '13' — za ně lze doplnit lib. řetězec

OVF je $S(x) = \sum_{n\geq 0} s_n x^n = 1 + x + (2x^1 + 2x^2)\cdot S(x)$

$(1-2x-2x^2)\cdot S(x) = 1+x \Rightarrow S(x) = \dfrac{1+x}{1-2x-2x^2}$

$1-2x-2x^2$ má kořeny $x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

asymptotický odhad s_n – viz str. 4

rozklad na parciální zlomky + sečtení jejich OVF ⟶ vzorec pro s_n

OVF se hodí pro komb. objekty, kt. se dají vyjádřit jako uspořádané n-tice (posloupnosti)

def.: Exponenciální vytvořující fce (EVF) posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je F.M.Ř. $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot \dfrac{x^n}{n!}$

př.: $(1,1,1,1,\ldots) \rightsquigarrow$ EVF $A(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots = e^x$

$(1,1,2!,3!,\ldots n!\ldots) \rightsquigarrow$ EVF $\sum_{n\geq 0} n!\cdot\dfrac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$

Operace – – $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{x^n}{n!}$ $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n \cdot \dfrac{x^n}{n!}$

$A(x) + B(x) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\cdot\dfrac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$

pro $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha\cdot A(x) = \longrightarrow \{\alpha\cdot a_n\}_{n=0}^{\infty}$

KG2 VF 3/1

$$A'(x) = \frac{d}{dx} A(x) = \sum_{n\ge 0} \frac{a_n \cdot n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n\ge 1} \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\ge 0} \frac{a_{n+1} \cdot x^n}{n!}$$

posun doleva

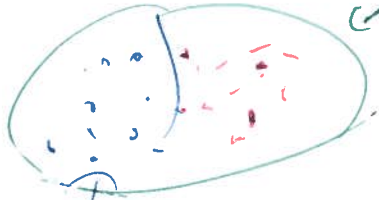
– integrál ~ posun doprava

$A(x)\cdot B(x)$ ~ koeficient x^n je $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\cdot\frac{b_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{a_k b_{n-k}}{n!}$

$$\Rightarrow \sum_{n\ge 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right)\cdot\frac{x^n}{n!}$$

↳ Kombinace objektů A a B o celkové velikosti n

EVF se hodí pro neuspořádané sjednocení objektů na disjunktní / „olabelovaných" vrcholech (každý vrchol má identifikátor)



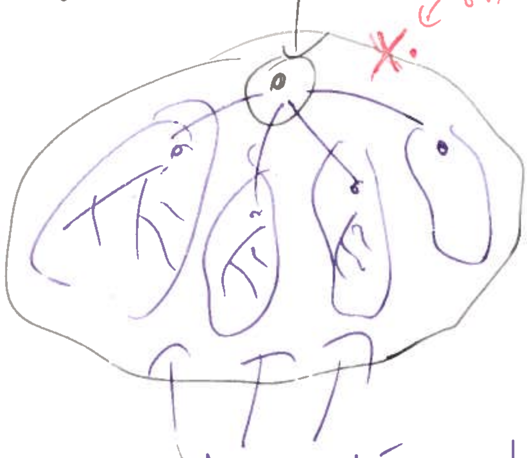
množina velikosti n

vybereme k prvků z n pro A, z bylých n-k je pro B

př.: r_n = # koster K_n s jedním vrcholem zvoleným jako kořen

$$R(x) = \sum_{n\ge 0} r_n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

EVF 1 vrcholu



$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x\cdot\frac{R(x)^k}{k!} = x\cdot e^{R(x)}$$

$\Rightarrow x = \frac{R(x)}{e^{R(x)}}$

$\Rightarrow R(x)$ je inverzní fce k $\frac{y}{e^y}$

k částí → zakořeněné kostry

EVF $\frac{R(x)^k}{k!}$ – interpretace násobení EVF

(každou kostru dostaneme v $R(x)^k$ $(k!)$-krát)

KG2 VF 4/

cíl: asymptotické odhady

def.: poloměr konvergence OVF $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

je $R := \sup\{c>0 : |a_n| \leq \left(\frac{1}{c}\right)^n$ až na konečně mnoho $n\}$

Lemma: a) A diverguje pro lib. $x : |x|>R$

b) A konverguje — " — $: |x|<R$

Dk.: a) $\underline{|a_n x^n| \geq 1}$ pro nekonečně mnoho n

$\hookrightarrow$ $|x|>R \Rightarrow \exists \infty$ mnoho n: $|a_n| > \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$

b) $|x|<R$ — zvolme y: $|x|<y<R$

$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n| < \left(\frac{1}{y}\right)^n$

$$\forall m \geq n \quad \sum_{n\geq m} |a_n \cdot x^n| \leq \sum_{n\geq m} |a_n| \cdot |x|^n = \sum_{n\geq m} \underbrace{|a_n| y^n}_{<1} \cdot \left(\frac{|x|}{y}\right)^n$$

$$< \sum_{n\geq m} \left(\frac{|x|}{y}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{|x|}{y}} \cdot \left(\frac{|x|}{y}\right)^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$\square$

---

př.: $S(x) = \frac{1+x}{1-2x-2x^2}$ — def. všude kromě $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ pro dost velké n: $\forall \varepsilon > 0$: $S_n \leq \left(\frac{1}{R-\varepsilon}\right)^n < (2{,}7321)^n$

$\Rightarrow S_n = O((2{,}7321)^n)$