9. CVIČENÍ Z KG 2, PONDĚLÍ 17.4.

Chordální grafy a grafové polynomy

Definice. Perfektní eliminační schéma (PES) *grafu* G *je uspořádání vrcholů* $v_1, \ldots,$ v_n *takové, že* $\forall i \in [n] : N(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ *je klika v* G *(kde* $N(v)$ *je množina sousedů* v*).*

1. Dokažte, že graf G *je chordální právě, když má PES.*

2. Rozmyslete si, že *chodální grafy jsou perfektní* (ale ne naopak). Hint: najděte dolní odhad na klikovost ω a horní odhad na barevnost χ.

3. Ukažte, že chordální graf na n vrcholech má nejvýš n maximálních klik, tedy klik, do kterých nelze přidat další vrchol, aby zůstaly klikou. (Rozmyslete si, že nechordální graf může mít obecně až exponenciálně mnoho maximálních klik.)

Tutteův polynom

Pro graf $G = (V, E)$ a podmnožinu hran $F \subseteq E$ definujeme:

- $k(V, F) =$ počet komponent grafu (V, F)
- *Rank* $r(V, F) = |V| - k(V, F) =$ počet hran libovolné kostry grafu (V, F) (kostra v souvislém či nesouvislém grafu je maximální acyklický podgraf).
- *Nulita* $n(V, F) = |F| - r(V, F) =$ počet hran *mimo* libovolnou kostru grafu (V, F).

Definice. Tutteův polynom *grafu* $G = (V, E)$ *je*

$$T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)}.$$

Věta (rekurentní vzorec pro Tutteův polynom).

$$T_G = \begin{cases} 1 & \textit{jestliže } E(G) = \emptyset \\ xT_{G-e} = x \cdot T_{G/e} & \textit{jestliže } e \in E(G) \textit{ je most} \\ yT_{G-e} = y \cdot T_{G/e} & \textit{jestliže } e \in E(G) \textit{ je smyčka} \\ T_{G-e} + T_{G/e} & \textit{jestliže } e \in E(G) \textit{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

4. Ukažte, že pro souvislý graf G platí:

a) $T_G(2, 2) = 2^{|E(G)|}$
b) $T_G(1, 2) =$ počet souvislých podgrafů G s množinou vrcholů $V(G)$
c) $T_G(2, 1) =$ počet acyklických podgrafů G s množinou vrcholů $V(G)$

5. Mějme multigraf G, podmnožinu jeho hran $F \subseteq E(G)$ a matici incidence A_F pro hrany v F. Ukažte:

a) $r(F) = \operatorname{rank}(A_F)$ nad $\mathbb{Z}_2$
b) $n(F) = \dim \operatorname{Ker}(A_F)$ nad $\mathbb{Z}_2$

6. Nechť $\pi_G(c)$ je chromatický polynom (tedy pro přirozené c jde o počet dobrých c-obarvení $G = (V, E)$). Dokažte, že

$$\pi_G(c) = (-1)^{r(V,E)} \cdot c^{k(V,E)} \cdot T_G(1 - c, 0)$$

Hint: Rovnost lze dokázat dvěma způsoby: přes rekurentní vzorce pro T_G a $\pi_G(c)$ nebo přes princip inkluze a exkluze (pro důkaz přes inkluzi a exkluzi se zaměřte na případy, kdy G má smyčku a kdy ji nemá).