

12. CVIČENÍ Z ADS 1, ČTVRTEK 5.5. 10:40

Rozděl a panuj (nad algoritmy i rekurencemi)

1. *Vícecestý MergeSort*. Upravme MergeSort, aby rozdělil pole na k částí, ty pak setřídil rekurzivně a slil. V jakém čase lze slévat k setříděným polí o celkové délce n ? Jaká je pak celková časová složitost vícecestného MergeSort? Jaké se vyplatí zvolit k ?

2. *Rekurence*. Vyřešte následující rekurence (kde vždy máme $T(1) = 1$):

a) $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$ (např. binární vyhledávání)

b) $T(n) = 16T(n/4) + \Theta(n)$

c) $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$

d) $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$

e) $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^3)$

f) $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^3)$

g) $T(n) = 9T(n/2) + \Theta(n^3)$

3. „*Nekuchařkové*“ rekurence. Vyřešte následující rekurence (opět máme $T(1) = 1$):

a) $T(n) = 2T(n - 1) + \Theta(1)$ (např. Hanojské věže)

b) $T(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$

c) $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n \log n)$

d) $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + \Theta(n)$

4. *Spletitý kabel*. Mějme dlouhý kabel, z jehož obou konců vystupuje po n drátech. Každý drát na levém konci je propojen s právě jedním na konci druhém a my chceme zjistit, který s kterým. K tomu můžeme používat následující operace:

- i) přivést napětí na daný drát na levém konci,
- ii) odpojit napětí z daného drátu na levém konci,
- iii) změřit napětí na daném drátu na pravém konci.

Navrhněte algoritmus, který pomocí těchto operací zjistí, co je s čím propojeno. Snažte se počet operací minimalizovat.

5. *Převod mezi soustavami*. Mějme n -ciferné číslo v soustavě o základu z a chceme ho převést do soustavy o jiném základu (z považujeme za konstantu). Ukažte, jak to metodou Rozděl a panuj zvládnout v čase $O(\max(M(n), n \log n))$, kde $M(n)$ je čas potřebný na násobení n -ciferných čísel v soustavě o novém základu.

6. *Vylepšená kuchařka*. Vylepšete Kuchařkovou větu (Master Theorem), aby pokrývala případy, kdy se velikosti podproblémů liší o konstantu, tedy $T(n) \leq aT(n/b + k) + \Theta(n^c)$ pro konstantu k .

7. *Spletitý kabel neadaptivně.* Pro úlohu Spletitý kabel naleznete *neadaptivní* řešení, což znamená, že dotaz posloupnost vykonaných operací je dána dopředu nezávisle na výsledcích provedených dotazů na napětí. Jinými slovy, následující provedená operace nezávisí na výsledcích předchozích dotazů. (Hint: je třeba nějak upravovat vaše řešení pro původní úlohu?)

8. *Hanoj.* V úloze Hanojských věží máme 3 sloupy A, B, C, přičemž sloup A obsahuje n disků v pořadí dle jejich průměru (největší dole, nejmenší nahoře). Jak přemístit všechny disky ze sloupu A na B, přičemž je zakázáno položit větší disk na menší? Kolik přesunů musíme udělat?

9. *Hanoj 2.* Přidejme k Hanojským věžím ještě jedno pravidlo: je zakázáno přenášet disky přímo ze sloupu A na B nebo opačně (každý přesun se tedy musí uskutečnit přes sloup C). I nyní je problém řešitelný. Jak a s jakou časovou složitostí?