

9. CVIČENÍ Z ADS 1, ČTVRTEK 14.4. 10:40

Binární vyhledávací stromy (BVS) II: AVL a (a, b) -stromy

1. *Intervalový update.* Mějme AVL strom jako slovník dvojic (klíč, hodnota), přičemž hodnoty jsou číselné. Upravte jej, aby podporoval operaci $\text{add}(x, y, \delta)$, která k hodnotám všech klíčů v intervalu $[x, y]$ přičte δ . Tato operace má běžet v $O(\log n)$, takže nemusíme hned provést aktualizaci hodnot všech klíčů v daném intervalu, stačí když $\text{Find}(k)$ vrátí správnou hodnotu klíče k .
2. *(a, b) -stromy a volba b .* Odhalte, jak závisí složitost operací s (a, b) -stromy na parametrech a a b . Z toho odvoďte, že se nikdy nevyplatí volit b výrazně větší než $2a$.
3. *(a, b) -join.* Navrhněte operaci $\text{Join}(X, Y)$, která dostane dva (a, b) -stromy X a Y a sloučí je do jednoho. Může se přitom spolehnout na to, že všechny klíče z X jsou menší než všechny z Y . Zkuste dosáhnout složitosti $O(\log |X| + \log |Y|) = O(\max\{\log |X|, \log |Y|\})$.
4. *Lineární konstrukce.* Ukažte, že pokud budeme do prázdného (a, b) -stromu postupně vkládat klíče $1, \dots, n$, provedeme celkem $\Theta(n)$ operací. K tomu si potřebujeme pamatovat, ve kterém vrcholu skončil předchozí vložený klíč, abychom nemuseli pokaždé hledat znovu od kořene.
5. *Okénkový medián.* Máme dáno přirozené k a poté na vstupu přicházejí čísla. Kdykoliv přijde další, vypište medián z posledních k čísel (medián je $\lceil k/2 \rceil$ -tý nejmenší prvek). Dosáhněte časové složitosti $O(\log k)$ na operaci.
6. *Jednosměrné operace.* Navrhněte úpravu operací Insert a Delete do (a, b) -stromů, aby operace procházely stromem pouze od kořene dolů a nebylo nutné jít zpět. Předpokládejte $b \geq 2a$.
7. *Jen jeden bit pro AVL.* V AVL stromu je potřeba udržovat v každém vrcholu znaménko $\{-, 0, +\}$, na což jsou potřeba dva bity. Ukažte, že existuje způsob, jak si vystačit s jedním bitem na vrchol.

Bonusové úlohy:

8. *Malé zaplnění.* Nevýhodou (a, b) -stromů je, že plýtvají pamětí – může se stát, že vrcholy jsou zaplněné jen z poloviny. Navrhněte úpravu, která zaručí zaplnění z alespoň $2/3$, až na zaokrouhlování a kromě kořene.

9. *Levá liána a dokonalé vyvažování pomocí rotací.* Ukažte, jak pomocí rotací převést libovolný BVS na cestu, kde v kořeni je maximum, v listu minimum a každý vnitřní vrchol má jen levého syna. Jak poté v lineárním čase převést tuto cestu na dokonale vyvážený BVS, opět jen pomocí rotací?

10. *Pomalé sjednocení.* Dokažte, že budeme-li reprezentovat množiny binárními vyhledávacími stromy, nelze sjednocení provést rychleji než lineárně v nejhorším případě. Platí to dokonce i tehdy, máme-li na vstupu zaručený dokonale vyvážený strom a výstup může být jakkoliv nevyvážený.