6. CVIČENÍ Z ADS 1, ČTVRTEK 10:40

Nejkratší cesty II: Bellmanův-Fordův a Floydův-Warshallův algoritmus

1. *Rozcvička.* Lze se v algoritmech na hledání nejkratší cesty zbavit záporných hran tím, že ke všem ohodnocením hran přičteme nějaké velké číslo k?

2. *Hrany na nejkratších cestách.* Vymyslete algoritmus, který nalezne všechny hrany, jež leží na alespoň jedné nejkratší cestě mezi vrcholy s a t. (Dvě varianty podle toho, jestli máme záporné hrany.)

3. *BF a záporné cykly* Upravte Bellmanův-Fordův algoritmus, aby uměl detekovat záporný cyklus dosažitelný z vrcholu v_0. Uměli byste tento cyklus vypsat?

4. *Použití Floyda-Warshalla.* Připomeňte si Floydův-Warshallův algoritmus a zkuste ho upravit následujícími způsoby:

- aby vypsal nejkratší cestu mezi vrcholy,
- aby pro každý vrchol našel nejkratší kružnici, která jím prochází (není-li v grafu záporný cyklus),
- a aby uměl detekovat záporný cyklus.

5. *Nejpravděpodobnější cesta.* Počítačovou síť popíšeme orientovaným grafem, jehož vrcholy odpovídají routerům a hrany linkám mezi nimi. Pro každou linku známe pravděpodobnost toho, že bude funkční. Pravděpodobnost, že bude funkční nějaká cesta, je dána součinem pravděpodobností jejích hran. Jak pro zadané dva routery najít nejpravděpodobnější cestu mezi nimi?

6. *Jak dědeček měnil, až vyměnil (ve směnárně).* Směnárna obchoduje s n měnami (měna číslo 1 je koruna) a vyhlašuje matici kurzů K. Kurz K_{ij} říká, kolik za jednu jednotku i-té měny dostaneme jednotek j-té měny. Vymyslete algoritmus, který zjistí, zda existuje posloupnost směn, která začne s jednou korunou a skončí s více korunami.

7. *Další varianty relaxačního metaalgoritmu.* Uvažme následující dva relaxační algoritmy:

- Provedeme n fází, v každé zrelaxujeme všechny vrcholy s ohodnocením $h(v) < \infty$.
- Provedeme n fází, v každé projdeme všechny hrany uv a pokud $h(v) < h(u) + \ell(uv)$, tak snížíme $h(v)$.

Spočtou tyto algoritmy vzdálenosti z v_0 na grafu bez záporných cyklů? Jakému algoritmu se podobají?

Bonusové úlohy:

8. *Dijkstra exponenciální se zápornými hranami (z minula).* Najděte příklad grafu s ohodnocenými hranami, ale bez záporných cyklů, na němž Dijkstrův algoritmus poběží exponenciálně dlouho.

9. *„Jednoduché“ nerovnice (z minula).* Pro proměnné $x_1, \ldots, x_n$ máme dánu sadu nerovnic tvaru $x_i - x_j \leq c_{ij}$, kde $c_{ij} \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta (ne nutně kladná). Jak najít nějaké řešení, tedy ohodnocení proměnných splňující všechny nerovnice?

10. *Zastavení relaxačního metaalgoritmu.* Dokažte, že v grafu bez záporných cyklů se obecný relaxační algoritmus zastaví, ať už vrchol k relaxaci (uzavření) vybíráme libovolně.