5. CVIČENÍ Z ADS 1, ČTVRTEK 10:40

Dijkstrův algoritmus a nejkratší cesty

1. *Nejdelší cesty (z minula).* Na vstupu máme acyklický orientovaný graf (DAG) s délkami hran $\ell : E \to \mathbb{R}^+$. Pro dané dva vrcholy u a v nalezněte počet nejdelší cest z u do v (a jejich délku, definovanou jako součet $\ell(e)$ přes hrany e na cestě).

2. *Exponenciálně mnoho nejkratších cest.* Ukažte, jak pro libovolné n sestrojit graf na nejvýše n vrcholech, v němž mezi nějakými dvěma vrcholy existuje $2^{\Omega(n)}$ nejkratších cest.

3. *Dijkstra se zápornou hranou.* Najděte (orientovaný ohodnocený) graf s jednou zápornou hranou a bez záporného cyklu, na němž Dijkstrův algoritmus „selže“, tedy buď nenajde nejkratší cestu nebo musí otevřít nějaký vrchol opakovaně.

4. *Ohodnocení vrcholů.* Na mapě města jsme přiřadili každé silnici čas na průjezd a každé křižovatce průměrnou dobu čekání na semaforech. Jak hledat nejrychlejší cestu?

5. *Dvě kritéria.* Silnice v mapě máme ohodnocené dvěma čísly: délkou a mýtem (poplatkem za projetí). Jak najít nejlevnější z nejkratších cest?

6. *Hledání spojení.* V Tramtárii jezdí po železnici samé rychlíky, které nikde po cestě nestaví. V jízdním řádu je pro každý rychlík uvedeno počáteční a cílové nádraží, čas odjezdu a čas příjezdu. Nyní stojíme na nádraží S a chceme se co nejrychleji dostat na nádraží T. Navrhněte algoritmus, který najde takové spojení.

7. *Maximalizace minima.* Mějme mapu města ve tvaru orientovaného grafu. Každou hranu ohodnotíme podle toho, jaký nejvyšší kamion po dané ulici může projet. Po cestě tedy projede maximálně tak vysoký náklad, kolik je minimum z ohodnocení jejích hran. Jak pro zadané dva vrcholy najít cestu, po níž projede co nejvyšší náklad?

Bonusové úlohy:

8. *Silně souvislá orientace (z minula).* Ukažte, že v každém neorientovaném grafu *bez mostů* je možné hrany zorientovat tak, aby výsledný graf byl silně souvislý. Dává důkaz i efektivní algoritmus?

9. Mějme orientovaný graf G. Jak do něj přidat co nejméně hran tak, aby se stal silně souvislým?

10. *Dijkstra se zápornými hranami II.* Najděte příklad grafu s ohodnocenými hranami, ale bez záporných cyklů, na němž Dijkstrův algoritmus poběží exponenciálně dlouho.

11. *„Jednoduché“ nerovnice.* Pro proměnné $x_1, \ldots, x_n$ máme dánu sadu nerovnic tvaru $x_i - x_j \leq c_{ij}$, kde $c_{ij} \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta (ne nutně kladná). Jak najít nějaké řešení, tedy ohodnocení proměnných splňující všechny nerovnice?