11. A 12. CVIČENÍ Z MATEMATICKÝCH DOVEDNOSTÍ

důkazy přímo, nepřímo, sporem a indukcí

Důkazy indukcí:

Příklad první Pro každé přirozené $n \geq 4$ platí $2^n \leq n!$.

Příklad druhý Fibonacciho posloupnost (F_i) je definovaná následovně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n > 1$. Dokažte:

a) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

b) $\frac{1{,}6^n}{3} < F_n < 1{,}7^n$ pro $n > 0$

c) F_n a F_{n+1} jsou nesoudělná.

Příklad třetí Nechť $a_0 = 1, a_1 = 2$ a $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$. Potom $a_n = n + 1$.

Příklad čtvrtý Dokažte, že pro každé $n \geq 0$ dělí n přímek rovinu na nejvýše $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ částí.

Příklad pátý Pro každé $n \geq 1$ platí

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1 \;.$$

Příklad šestý Každé přirozené číslo větší rovné dvěma má prvočíselného dělitele.

Další důkazy přímo, nepřímo (obměnou) či sporem:

Příklad sedmý Pro libovolná reálná čísla a, b platí nerovnost $a^2 + b^2 >= 2ab$.

Příklad osmý Pro libovolná celá čísla n a m dokažte, že n a m jsou obě lichá právě tehdy, když $n \cdot m$ je liché.

Příklad devátý Pokud a, b a c jsou lichá čísla, pak rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá žádné celočíselné řešení.

(Těžší varianta: taková rovnice nemá ani žádné *racionální* řešení.)

Příklad desátý Existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Příklad jedenáctýJe-li číslo zapsané v desítkové soustavě pomocí samých jedniček prvočíslo, počet použitých jedniček je také prvočíslo.