12. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární zobrazení

Příklad první *Lineární rozcvička:* Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je/není lineárním zobrazením.

- $f_1(x) = 0$,
- $f_2(x) = 1$,
- $f_3(x) = 2x$,
- $f_4(x) = x + 1$,
- $f_5(x) = x^2$.

Příklad druhý Pro následující zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ najděte jejich matice:

a) překlopení dle osy x
b) středová souměrnost dle počátku (tedy překlopení dle osy x a poté dle osy y)
c) otočení o $90°$ kolem počátku proti směru hodinových ručiček
d) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček
e) projekce na osu y

Příklad třetí Pro zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x, y) = (x+y,\, x-y)^T$ dokažte, že jde o lineární zobrazení a vypočtěte matici tohoto zobrazení (vůči kanonické bázi).

Příklad čtvrtý Vypočtěte matici lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které po řadě zobrazí vektory:

$$\begin{aligned} f((-1,-3,1)^T) &= (-1,1,0)^T, \\ f((0,3,-2)^T) &= (0,1,-1)^T, \\ f((-1,-2,2)^T) &= (1,0,1^T). \end{aligned}$$

Lineární zobrazení v jiných prostorech než $\mathbb{R}^n$:

Příklad pátý Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární:

- $f_6(A) = A^T$,
- $f_7(A) = \mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$,
- $f_8(x) = \mathrm{RREF}(A)$,
- $f_9(A) = A^2$,
- $f_B(A) = B \cdot A$ (pro pevně danou matici $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

Příklad šestý Rozhodněte, zda zobrazení $(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_2, x_3, \dots)$ na prostoru reálných posloupností je lineární.