6. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Grupy a permutace

PŘÍKLAD PRVNÍ   Zjistěte, zda je grupou:

a) $(2\mathbb{Z}, +)$,
b) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,
c) $(\mathbb{Q}, -)$,
d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
f) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
g) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,
h) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení,
i) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

PŘÍKLAD DRUHÝ   Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na $\mathcal{G}$ tak aby $(\mathcal{G}, \circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Zdůvodněte.

a)

$\circ$	0
0	

b)

$\circ$	0	1
0		
1		

c)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

d)

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou (komutativní) grupou:

a) množina $\left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \mid z \in \mathbb{Z} \right\}$ s maticovým součinem,
b) množina $\left\{ \left(\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \right) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ s maticovým součinem.

PŘÍKLAD TŘETÍ   Mějme permutace zadané tabulkou:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ   Mějme permutaci zadanou cykly:

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7)$$

Spočítejte p^9 a p^{-14}. Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?