5. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Regularita a inverzní matice

Příklad první Rozmyslete si, kdy je trojúhelníková matice regulární. (Připomeňme, že horní trojúhelníková matice A má libovolné hodnoty na diagonále a nad ní, ale pod diagonálou jsou samé nuly. Formálně: $a_{ij} = 0\ \forall i > j$. Dolní trojúhelníková matice to má naopak.)

Příklad druhý Vypočtěte inverzní matici k následující matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad třetí Zjednodušte následující výraz, kde A, B jsou regulární matice stejného řádu:

$$(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}.$$

Příklad čtvrtý Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

Příklad pátý Vyřešte maticovou rovnici pro neznámou (regulární) matici X:

$$((X^{-1}A^{-1})^T - (B^T)^{-1})B^{-1} = 0,$$

kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -5 & -4 & -6 \\ 3 & 10 & -2 \end{pmatrix}$. (Pokud se vám nechce počítat, stačí jen vymyslet postup.)

Dva bonusové příklady na rozmyšlenou:

Příklad šestý Ukažte, že pokud $A^2 - A + I_n = 0$, pak matice A je regulární.

Příklad sedmý Vymyslete, jak rychle mocnit matice, tedy jak co nejrychleji spočíst A^k pro čtvercovou matici A a velké k.