# 13. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Komplementarita a metoda řezů

*Pár příkladů z písemky:*

Příklad první — Zformulujte celočíselný program pro NP-úplný problém $k$-Cesta: Na vstupu máte neorientovaný graf $G = (V, E)$ a $k \in \mathbb{N}$. Určete, jestli je v $G$ cesta délky $k$ (pro připomenutí: na cestě se neopakují vrcholy). CLP tedy bude přípustné právě tehdy, když se v grafu taková cesta nachází.

Příklad druhý — Je dán mnohostěn v $\mathbb{R}^4$ jako průnik nadroviny $x_1 - 2x_3 = -1$ a poloprostorů:

$$\begin{aligned} x_3 &\geq 0 \\ x_2 - 2x_3 &\geq 0 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 0 \\ 2x_3 + x_4 &\leq 2 \end{aligned}$$

Jaká je dimenze tohoto mnohostěnu, pokud víte, že každá nerovnost výše odpovídá jedné fasetě (tj. příslušná nadrovina je tečná a určuje fasetu)?

Dále pro body $(-1, 0, 0, 1)$, $(1, 2, 1, 0)$ určete, jestli jsou to vrcholy mnohostěnu, a pro nadrovinu $x_2 = 1$ určete, jestli je tečná, sečná, nebo mimoběžná.

---

**D(**Volnost**):** Mějme soustavu lineárních nerovnic $(S)$ a v ní $j$-tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor $x'$.

Pak *volnost* (slack) $j$-té nerovnosti vůči řešení $x'$ je $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla $\geq$, definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řesení.

**T(**Komplementarita**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu $(x^*, y^*)$. Pak platí následující věta: Dvojice $(x^*, y^*)$ je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon x_i^* \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}\colon s_j^{(P)} \cdot y_j^* = 0. \tag{2}$$

---

Příklad třetí Franta uhodl řešení $x = (6, 2, 0)$ následujícího LP:

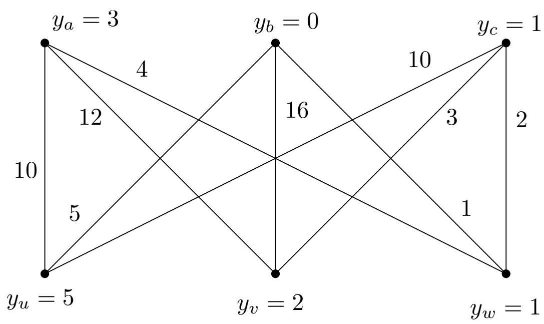
$$\begin{aligned} \max x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 28 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\le 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Rozhodněte za pomoci komplementarity, zda Franta uhodl optimální řešení.

Příklad čtvrtý Optimální řešení duální úlohy k následující úloze je $(0; 7; 5, 5; 0)$. Spočtěte pomocí komplementarity optimální řešení primáru.

$$\begin{aligned} \max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 & \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &\le 12 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\le -1 \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_3 &\le 4 \\ x_1, \ldots, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Příklad pátý Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané ceny a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování minimální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.




Dále se zkuste zamyslet, jaké různé možnosti máte pro dokázání, že dané řešení je optimální.

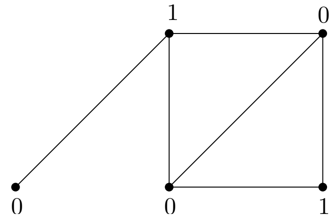
## Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je 27. června 10:00.

Druhý domácí úkol **[2 body]**

Na obrázku je zadán graf a u jeho vrcholů je přípustné řešení relaxovaného lineárního programu pro maximální nezávislou množinu:

$$\max \sum_{v \in V} x_v$$
$$\forall e \in E : x_u + x_v \leq 1$$
$$\forall v \in V : x_u \geq 0$$




S užitím komplementarity ověřte, jedná-li se o optimální řešení.