V celém cvičení: A je matice o rozměrech $m \times n$ a $b \in \mathbb{R}^m$.

D: Mějme lineární program s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max c^T x \text{ za podmínek } Ax \leq b \text{ a } x \geq 0 \tag{P}$$

Pak jeho *duálem* nazveme následující lineární program s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min b^T y \text{ za podmínek } A^T y \geq c \text{ a } y \geq 0 \tag{D}$$

T(Slabá věta o dualitě**):** Pro libovolné řešení x úlohy (P) a libovolné řešení duálu y platí $c^T x \leq b^T y$.

T(Silná věta o dualitě**):** Pro úlohy (P) a (D) nastane právě jedna z následujících možností:

1. Ani (P), ani (D) nemá přípustné řešení.
2. (P) je neomezená a (D) nemá přípustné řešení.
3. (P) nemá přípustné řešení a (D) je neomezená.
4. Jak (P), tak (D) mají přípustné řešení. Pak existuje optimální řešení x^* úlohy (P) a optimální řešení y^* úlohy (D) a platí $c^T x^* = b^T y^*$.

Původní program:	*V duálu bude:*
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i-tá podmínka má $\leq$ i-tá podmínka má $\geq$ i-tá podmínka má $=$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	j-tá podmínka má $\geq$ j-tá podmínka má $\leq$ j-tá podmínka má $=$

T(Farkasovo lemma pro nerovnice**):**
Soustava nerovnic $Ax \leq b$ má řešení $\Leftrightarrow$ neexistuje $y \in \mathbb{R}^m$ nezáporné takové, že $y^T A = 0$ a $y^T b < 0$.

T(Farkasovo lemma pro rovnice**):**
Soustava rovnic $Ax = b$ má nezáporné řešení $\Leftrightarrow$ neexistuje $y \in \mathbb{R}^m$ takové, že $y^T A \geq 0$ a $y^T b < 0$.

T(Farkasovo lemma pro nerovnice 2**):**
Soustava nerovnic $Ax \leq b$ má nezáporné řešení $\Leftrightarrow$ neexistuje $y \in \mathbb{R}^m$ nezáporné takové, že $y^T A \geq 0$ a $y^T b < 0$.

Příklad první Pro zadaný následujíci NP-těžký problém vymyslete nejprve vhodný celočíselný lineární program, a pak tento program zrelaxujte a zdualizujte.

Problém je Pakování do košů. Máte na vstupu n objektů o velikosti $v_1, \ldots, v_n$, každá velikost je reálné číslo mezi 0 a 1. K dispozici máte v podstatě neomezené množství košů o kapacitě 1. Vaším úkolem je nalézt rozložení všech objektů do košů tak, že počet neprázdných košů bude co nejmenší.

Příklad druhý Dokažte Farkasovo lemma (v libovolné verzi) pomocí silné věty o dualitě.

Příklad třetí Z Farkasova lemmatu pro nerovnice dokažte Farkasovo lemma pro rovnice a poté obráceně.

Příklad čtvrtý Dokažte následující obdobu Farkasova lemmatu pro rovnice bez podmínky nezápornosti:

Soustava rovnic $Ax = b$ má řešení $\Leftrightarrow$ neexistuje $y \in \mathbb{R}^m$ takové, že $y^T A = 0$ a $y^T b = -1$.

Hint: na důkaz jedné implikace se může hodit použít Gaussovu eliminaci.