9. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Dualita a totální unimodularita

Převodní tabulka pro dualitu:

Původní program:	*V duálu bude:*
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i-tá podmínka má $\leq$ i-tá podmínka má $\geq$ i-tá podmínka má $=$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	j-tá podmínka má $\geq$ j-tá podmínka má $\leq$ j-tá podmínka má $=$

D: Čtvercová matice $M \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ je *unimodulární*, pokud $\det M \in \{-1, 1\}$.

T: Součin a inverze unimodulárních matic jsou unimodulární matice.

T: Unimodulární matice jsou právě ty celočíslené matice, jejichž inverze je celočíselná.

D: Matice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud determinant každé její čtvercové podmatice je roven $-1, 0$ nebo 1.

D: Mnohostěn nazveme *celočíselným*, pokud má všechny vrcholy celočíselné.

T: Uvažme lineární program $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$, kde b je celočíselný vektor a A je totálně unimodulární matice. Pak je mnohostěn přípustných řešení celočíselný.

T(Důsledek předchozí věty**):** Uvažme celočíselný program ILP: $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}$ a jeho lineární relaxaci LP: $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$. Pokud je b celočíselný vektor a A totálně unimodulární, pak vrcholové optimální řešení LP je optimálním řešením ILP.

Příklad první Zformulujte lineární program, který řeší úlohu Nejkratší s,t-cesta v neorientovaném neohodnoceném grafu. Vysvětlete hlavní ideu vašeho lineárního programu. Až budete mít daný lineární program, zkonstruujte k němu duál.

Doplňující otázka: Má i váš duální program nějakou hlavní ideu?

Příklad druhý Nalezněte program, který je nepřípustný a jeho duál je také nepřípustný.

Příklad třetí Nechť A je totálně unimodulární matice. Dokažte následující:

- Dokažte, že A může obsahovat jen prvky 0, 1 nebo -1.
- Ukažte, že A^T, $\binom{A}{-A}$ a $(A|B)$ jsou totálně unimodulární matice, kde B je matice s libovolně mnoha sloupci, která má v každém sloupci právě jednu jednotku a zbytek nuly.

Příklad čtvrtý Mějme matici A velikosti $m \times n$, jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny B a C. Nechť také platí:

- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$.
- Každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A stejné znaménko, tak jeden řádek patří do B a druhý do C.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A různé znaménko, tak oba řádky patří do B, nebo oba patří do C.

Dokažte, že A je potom totálně unimodulární.

Tip: Dokazujte indukcí podle velikosti čtvercové podmatice. Začněte tím, že eliminujete případy, kdy v jednom sloupci je nejvýše 1 nenulová hodnota.

Příklad pátý Dokažte, že každá matice incidence orientovaného grafu je totálně unimodulární.

Příklad šestý Dokažte, že matice incidence neorientovaného grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní. Plyne z tohoto tvrzení snadné hledání celočíselných řešení některých problémů?

Příklad sedmý Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A je matice alespoň 3×3 a A i b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?