

5. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Mnohostěny a jejich stěny

Příklady naleznete na zadní straně.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v \mathbb{R}^d dimenze $d - 1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd. Nadrovinu určuje rovnice $c^T x = b$.

Nadrovina rozděluje prostor \mathbb{R}^d na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v \mathbb{R}^d , který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x \mid Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici A a reálný vektor b .

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x \in P : c^T x = t$, označíme $\{x \mid c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P .

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P . K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* \emptyset a P .

D: Stěny dimenze 0 nazýváme *vrcholy*. Stěny dimenze 1 nazýváme *hrany*. Stěny dimenze $d - 1$ nazýváme *fasety*.

D: d -dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d + 1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d -dimenzionální simplex v \mathbb{R}^d můžeme představit jako konvexní obal:

$$\text{conv}(0, (0, 0, \dots, 0, 1), (0, 0, \dots, 1, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0, 0))$$

PŘÍKLAD PRVNÍ Rozhodněte, jestli vrchol $v = (1, 1, 1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -10 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

PŘÍKLAD DRUHÝ Dokažte, že každý omezený konvexní mnohostěn dimenze d v \mathbb{R}^d má alespoň $d + 1$ vrcholů a alespoň $d + 1$ faset.

PŘÍKLAD TŘETÍ Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \ \& \ x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Máte mnohostěn $P \in \mathbb{R}^3$ určený množinou vrcholů:

$$\begin{aligned} a &= (2, 1, 6) \\ b &= (0, -5, 0) \\ c &= (-2, 2, -1) \\ d &= (0, -4, 0) \\ e &= (0, 1, 1) \end{aligned}$$

Pro každou následující nadrovinu určete, zda je vůči P tečná, sečná či mimoběžná a pro tečné nadroviny určete dimenzi příslušné stěny.

- a) $5x + 3y - 2z = 1$
- b) $x + y - z = 2$
- c) $3x + 1z = 0$

PŘÍKLAD PÁTÝ Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného následujícími nerovnostmi a zdůvodněte, že jde o všechny:

$$\begin{aligned} x + y + z &\leq 3 \\ y + 2z &\leq 2 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD ŠESTÝ

- a) Ověřte, že d -dimenzionální simplex může být vyjádřen také jako průnik $d + 1$ poloprostorů. Jinými slovy, najděte nerovnice, které určují nějaký d -dimenzionální simplex.
- b) Dokažte, že libovolná stěna simplexu je sama simplexem.
- c) Určete, kolik stěn dimenze k má d -dimenzionální simplex.