2. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Celočíselné programy a jejich relaxace

Příklad první *Z minula:* Na vstupu máte seznam bodů (x_i, y_i) v rovině, každý je středem čtverce. Vymyslete LP, které najde délky stran čtverců tak, aby součet délek stran čtverců byl největší možný a zároveň se čtverce nepřekrývaly, tedy aby se žádný bod jednoho čtverce nenacházel uvnitř jiného čtverce (může být jen na jeho hranici).

Zkuste vymyslet triky na snížení počtu podmínek ve výsledném LP (třeba to v nejhorším případě nemusí pomoct, ale v „typickém“ případě bude mít LP výrazně méně podmínek).

Příklad druhý **Část 1.** Mějme systém lineárních nerovnic, který obsahuje i ostré nerovnosti, kupř. tento:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &\le 8 \\ 2x - 5z &< -3 \\ 6x + 5y + 2w &= 5 \\ 3z + 2w &> 5 \\ x, y, z, w &\ge 0 \end{aligned}$$

Jak pomocí lineárního programování zjistit, zda takovýto systém má přípustné řešení?

Část 2. Můžeme tedy řešit lineární programy s ostrými nerovnostmi? Obecně ne. Jako příklad zkonstruujte „LP s ostrými nerovnostmi“, který:

- má (triviální) konečný horní odhad na hodnotu optima,
- má přípustné řešení a
- nemá optimální řešení.

Toto se pro lineární program nemůže stát – pokud je LP omezený a existuje přípustné řešení, tak také existuje optimální řešení.

Příklad třetí *Rozcvička s batohem!*

Zformulujte problém batohu pomocí celočísleného lineárního programování. Tedy pro předměty, kde každý má nějakou hmotnost h_i a cenu c_i, máme batoh s danou nosností H a snažíme se do něj naskládat předměty tak, abychom maximalizovali jejich cenu.

Příklad čtvrtý Pro problém vrcholové 3-obarvitelnosti grafu vymyslete vhodný celočíselný lineární program. Tento program pouze otestuje, zda-li je zadaný graf 3-obarvitelný.

Příklad pátý Minimální vážené párování v bipartitním grafu:

Formulujte CLP, který pro vážený bipartitní graf $G = (U, V, E, w)$ s partitami U a V, kde $w(e) \in \mathbb{R}$ je váha hrany e, nalezne perfektní párování minimální váhy.

Perfektní párování je množina hran taková, že každý vrchol je incidentní s právě jednou hranou, a váha párování je součet vah všech hran v párování.

Příklad šestý Student Tomáš Pilný dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujíciho, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, w)$, kde $w(e) \ge 0$ je délka hrany e, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou. Hamiltonovská kružnice navštíví každý vrchol právě jednou.

Tomáš navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv \in E} w(uv) x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{v | uv \in E} x_{uv} = 2$.“

Funguje toto řešení? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 14 dní od zadání.

Druhý domácí úkol **Dopravní problém.** **[2 body]**
V Kocourkově je n pekáren a m obchodů. Každý den i-tá pekárna upeče p_i rohlíků a j-tý obchod prodá o_j rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z i-té pekárny do j-tého obchodu stojí c_{ij} korun.

Jenže! Praxe v Kocourkově ukázala, že když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí l_{ij}. Logistiku l_{ij} je nutné platit pouze tehdy, když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné c_{ij}.

Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální.

Třetí domácí úkol **Sudoku.** **[2 body]**
Určitě vás napadlo, že sudoku lze řešit triviálním programem, který prostě projde všechny možnosti (tedy backtrackingem, DFS, ...). Dokázali byste popsat luštění sudoku jako úlohu celočíselného programování?