5. DOMÁCÍ ÚKOLY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární zobrazení a afinní prostory

Odevzdávejte emailem na `vesely@iuuk.mff.cuni.cz` *, termín je 19. 2. 23:59:59. Řešení můžete odevzdávat průběžně, budu se je snažit během pár dnů opravit. Svá tvrzení odůvodněte, můžete však používat věty z přednášky či cvičení.*

PŘÍKLAD PRVNÍ Rozhodněte, zda následující matice A, B mohou být maticí přechodu v prostoru $\mathbb{R}^n$ pro vhodné báze:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -7 & 9 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Pokud ano, najděte příklady bází, mezi kterými je tato matice maticí přechodu.
[3 body]

PŘÍKLAD DRUHÝ Dokažte, že pro daný vektorový prostor V množina všech izomorfismů $f : V \to V$ s operací skládání tvoří grupu.
[2 body]

PŘÍKLAD TŘETÍ Zjistěte, zda-li jsou následující vektory v prostoru $\mathcal{P}^2$ (polynomy stupně ≤ 2) afinně nezávislé:

$$p_1 = x^2 + x + 1, p_2 = 2x^2 - 3x, p_3 = x + 1, p_4 = -x^2 - 2$$

[2 body]

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Nechť U, V jsou nějaké lineární podprostory prostoru W a $a, b \in W$. Dokažte následující ekvivalence pro afinní podprostory:

a) $U + a = U + b$ právě tehdy, když $a - b \in U$,
b) $U + a = V + b$ právě tehdy, když $a - b \in U$ a $U = V$,

(Z čehož vyplývá, že afinní prostory $U + a$ a $V + b$ jsou si rovny jen, pokud vznikly posunutím stejného lineárního podprostoru.)
[3 body]