4. DOMÁCÍ ÚKOLY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Podprostory a zobrazení

Odevzdávejte emailem na `vesely@iuuk.mff.cuni.cz` *nebo na papíře na začátku cvičení, termín je 11.1. 12:20. Svá tvrzení odůvodněte, můžete však používat věty z přednášky či cvičení.*

Příklad první Označme U prostor všech symetrických matic řádu 3×3 a V prostor horních trojúhelníkových matic řádu 3×3

a) Najděte bázi a určete dimenzi prostorů U a V.
b) Co představuje prostor $U \cap V$ a jaká je jeho dimenze?
c) Co představuje prostor $U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$ a jaká je jeho dimenze?

[2 body]

Příklad druhý Dokažte: Je-li $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U + V$ lze zapsat jediným možným způsobem ve tvaru $w = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.
[3 body]

Příklad třetí Zvolte si bázi B prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a pro lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ zadané $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X^T$ určete matici vzhledem k bázi B.
[3 body]

Příklad čtvrtý Dokažte: Buď $f : U \to V$ lineární zobrazení mezi vektorovými prostory U a V. Potom:

a) Jádro zobrazení $\mathrm{Ker}(f) = \{x \mid f(x) = o\}$ je podprostor U.
b) Pro každé $x_1, x_2, \ldots x_k$ platí: $f(\mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots x_k\}) = \mathrm{span}\{f(x_1), \ldots f(x_k)\}$.

[2 body]