10. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory: báze a dimenze

Příklad první *Z minula:* Vyjádřete $7x - 7$ jako lineární kombinaci polynomů $x^2 + x, x + 2$ a $x^2 - x + 3$ nad $\mathbb{R}$.

Příklad druhý Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující množiny lineárně nezávislé (a pokud jsou lineárně závislé, vyjádřete nějaký vektor jako lineární kombinaci ostatních):

a) $\{u, u + v, u + w\}$,
b) $\{u + v, u + w, v + w\}$,
c) $\{u + v, u - v, u + w, u - w\}$,

Příklad třetí Najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující vektor $(1, 2, 3, 4)^T$.

Příklad čtvrtý Rozhodněte, zda vektory $(1, 2, 1)^T, (2, 5, 1)^T, (3, 2, 1)^T$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, a pokud ano, najděte souřadnice vektoru $v = (5, 1, 2)^T$ vzhledem k této bázi.

Příklad pátý Dokažte, že vektorový podprostor generovaný dvěma vektory $\mathbb{R}^3$ (tzn. lineární obal těchto vektorů) je buď přímka procházející počátkem, rovina procházející počátkem, nebo pouze počátek.

Příklad šestý Určete bázi a dimenzi podprostoru $\mathbb{R}^6$ daného soustavou rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Příklad sedmý Buďte U, V podprostory W a nechť $\dim U = 7, \dim V = 8, \dim W = 13$.

a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U + V)$ a najděte příklad, kdy se nabudou tyto meze.
b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$.