11. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Komplementarita a metoda řezů

D(Volnost**):** Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j-tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x'.
Pak *volnost* (slack) j-té nerovnosti vůči řešení x' je $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla $\geq$, definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řesení.
T(Komplementarita**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x^*, y^*). Pak platí následující věta: Dvojice (x^*, y^*) je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon x_i^* \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}\colon s_j^{(P)} \cdot y_j^* = 0. \tag{2}$$

Příklad první

Franta uhodl řešení $x = (6, 2, 0)$ následujícího LP:

$$\begin{aligned} \max x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 28 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rozhodněte za pomoci komplementarity, zda Franta uhodl optimální řešení.

Příklad druhý

Františka opsala od souseda při písemce z Optimalizací primál a optimální řešení duálu. Primálem je:

$$\begin{aligned} \min 10x_1 - 4x_2 & \\ x_1 + 0.6x_3 + 4x_4 &\geq 43 \\ x_1 - x_2 + 0.6x_3 + 10x_4 &\geq 27 \\ x_1 - x_2 - 0.4x_3 - x_4 &\geq 24 \\ x_1 - x_2 - 0.4x_3 - 2x_4 &\geq 22 \\ x_1 + 3.6x_3 - 3x_4 &\geq 56 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Optimálním řešením duálu je $y = (3.36, 0, 0, 6.48, 0.16)$. Úloha se však ptala na optimální řešení původního programu. Dořešte úlohu za Františku s použitím komplementarity.

Příklad třetí Pro LP a jeho duál z druhého příkladu nalezněte dvojici nenulových vektorů x a y takovou, že platí

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}\colon x_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$
$$\forall j \in \{1,\dots,m\}\colon s_j^{(P)} \cdot y_j = 0. \tag{2}$$

ale x a y **nejsou** dvojicí optimálních řešení.

Tip: Najděte rozdíl mezi zadáním této úlohy a zadáním komplementarity.

Metoda řezů: Mějme mnohostěn $P = \{x \mid Ax \le b, x \ge 0\}$, kde A i b jsou racionální.

D: Nechť nerovnice $\alpha^T x \le \beta$ je platná nerovnice pro P. Pak nerovnici $\lfloor \alpha^T \rfloor x \le \lfloor \beta \rfloor$ nazýváme platný řez.

Platný řez splňuje každý celočíselný bod mnohostěnu P. Obecný platný řez dostaneme sečtením nerovnic definujících mnohostěn vynásobených nezápornými čísly, zaokrouhlením koeficientů a pravé strany. Přesněji platný řez lze získat jako $\lfloor y^T A \rfloor x \le \lfloor y^T b \rfloor$ pro nějaké $y \ge 0$.

Následující věta říká, že přidáváním platných řezů dokážeme vytvořit jakoukoliv nerovnost platnou pro všechny celočíselné body P.

T: Nechť $P = \{x \mid Ax \le b, x \ge 0\}$ je racionální mnohostěn a nechť $\alpha^T x \le \beta, \alpha \in \mathbb{Z}^n, \beta \in \mathbb{Z}$ je nerovnost, kterou splňují všechna $x \in P \cap \mathbb{Z}^n$. Pak $\alpha^T x \le \beta$ lze odvodit postupným přidáváním platných řezů k P.

Příklad čtvrtý Vyzkoušíme si přidávání platných řezů pro konkrétní instanci problému batohu: Máme 5 věcí, váha i-té je w_i a cena c_i. Batoh má nosnost $W = 50$ a chceme maximalizovat součet věcí v batohu, abychom nepřekročili kapacitu. Věci jsou:

id	1	2	3	4	5
w_i	21	11	51	26	30
c_i	37	12	500	50	41

Celočíselné optimum je $(1,0,0,1,0)$ s hodnotou 87, ale optimum relaxace je $(0,0,50/51,0,0)$ s hodnotou 490,2. Jaké nerovnosti (splněné každým celočíselným řešením) přidat, aby se optimum relaxace co nejvíce přiblížilo celočíselnému optimu?