10. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Totální unimodularita a komplementarita

D: Matice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud determinant každé její čtvercové podmatice je roven $-1, 0$ nebo 1.

D(Volnost**):** Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j-tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x'.

Pak *volnost* (slack) j-té nerovnosti vůči řešení x' je $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$.

T(Komplementarita**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x^*, y^*). Pak platí následující věta: Dvojice (x^*, y^*) je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i^* \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \colon s_j^{(P)} \cdot y_j^* = 0. \tag{2}$$

Příklad první — Mějme matici A velikosti $m \times n$, jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny B a C. Nechť také platí:

- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$,
- každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty,
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A stejné znaménko, tak jeden řádek patří do B a druhý do C.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A různé znaménko, tak oba řádky patří do B, nebo oba patří do C.

Dokažte, že A je potom totálně unimodulární.

Tip: Dokazujte indukcí podle velikosti čtvercové podmatice. Začněte tím, že eliminujete případy, kdy v jednom sloupci je nejvýše 1 nenulová hodnota.

Příklad druhý — Dokažte, že každá matice incidence orientovaného grafu je totálně unimodulární.

Příklad třetí — Dokažte, že matice incidence neorientovaného grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní. Plyne z tohoto tvrzení snadné hledání celočíselných řešení některých problémů?

Příklad čtvrtý Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A je matice alespoň 3×3 a A i b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?

Příklad pátý Franta opsal od souseda při písemce z Optimalizací přípustné řešení duálu a zadaní primálu. Primál je:

$$\begin{aligned} \max 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Přípustným řešením duálu je: $y = (4, 0, 0)$. Úloha se však ptala na to, je-li řešení duálu optimem nebo ne. Dořešte úlohu za Josefa.

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 3 týdny od zadání.

Osmý domácí úkol **[3 body]**

Pro graf $G = (V, E)$ uvažme relaxovaný lineární program pro perfektní párování:

$$\begin{aligned} \min \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e \\ \forall v \in V : \sum_{u \in V : uv \in E} x_{uv} = 1 \\ \forall uv \in E : x_{uv} \geq 0 \end{aligned}$$

1. Pro každé $n \geq 3$ nalezněte souvislý graf na n vrcholech takový, že relaxovaný LP nemá přípustné řešení.
2. Dokažte, že pokud existuje $E' \subseteq E$ taková, že každá komponenta (V, E') je buď lichá kružnice nebo hrana, potom relaxovaný LP má přípustné řešení.
3. Dokažte, že pokud existuje přípustné řešení, pak existuje přípustné polo-číselné řešení, tedy řešení, které je má hodnoty proměnných 0, 1/2 a 1.