6. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplexová metoda

T(Vrcholový popis konv. mnohostěnů**):** Každý omezený konvexní mnohostěn je roven konvexnímu obalu všech svých vrcholů. Omezené mnohostěny tedy můžeme popsat buď pomocí všech poloprostorů (pak počítáme jejich průnik) nebo pomocí všech vrcholů (pak počítáme jejich konvexní obal).

Pár hezkých mnohostěnů:

D: d-dimenzionální křížový mnohostěn je konvexní obal všech bodů $\pm e_i$ (pro $i \in 1, \dots, d$), kde $(e_i)_j = 1$, pokud $i = j$ a 0 jinak. Ve třech dimenzích jsou to body $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,0)$ a $(-1,0,0)$ a říkáme mu osmistěn.

D: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\operatorname{conv}(0, (0,0,\dots,0,1), (0,0,\dots,1,0), \dots, (1,0,\dots,0,0))$$

Úloha LP v rovnicovém tvaru: max $c^T x$ za podmínek $Ax = b, x \geq 0$.

D:*Báze* je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \dots n\}$ taková, že A_B je regulární (A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B).

Bázické řešení x odpovídající B je řešení, pro které platí: $\forall i \notin B : x_i = 0$.

Příklady ještě k mnohostěnům:

Příklad první   Rozhodněte, jestli vrchol $v = (1,1,1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin a vypište všechny vrcholy daného mnohostěnu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Příklad druhý   Dokažte že, každý omezený konvexní mnohostěn dimenze d v $\mathbb{R}^d$ má alespoň $d+1$ vrcholů a alespoň $d+1$ faset.

Příklad třetí   Dokažte, že libovolná stěna simplexu je sama simplexem.

Příklady na simplexovou metodu:

Příklad čtvrtý Převeďte LP do rovnicového tvaru:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_2 + x_3 &\le 12 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &\ge -7 \\ x_5 &\ge 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \\ x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

Máme-li libovolný lineární program s m lineárními nerovnicemi či rovnicemi a n proměnnými, kolik nejvýše může mít rovnicový tvar této úlohy proměnných?

Příklad pátý Mějme zadaný následující problém:

$$\begin{aligned} \max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & \\ x_1 - x_5 + x_6 &= 20 \\ x_1 + x_3 + x_7 &= 30 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_8 &= 10 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_9 &= 1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_9 &\ge 0 \end{aligned}$$

a počáteční bazické řešení $(0, 0, 0, 0, 0, 20, 30, 10, 1)$. Proveďte jeden krok simplexového algoritmu. Zdůvodněte, proč jste si vybrali ze všech možností právě tento.

Příklad šestý Vyřešte následující optimalizační úlohu už celou:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 - x_2 + 2x_3 & \\ 2x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\le 20 \\ x_2 + 2x_3 &\le 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Příklad sedmý Nalezněte počáteční bazické přípustné řešení pomocí simplexového algoritmu (na jiném LP). Podařilo se vám ho najít do 3 kroků?

$$\begin{aligned} \max 4x_2 - x_4 & \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 &= 5 \\ -x_2 + x_3 &= -2 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Domácí úkol bude zadán, ale nevešel se.

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 2 týdny od zadání.

Šestý domácí úkol **[3 body]**

Pomocí simplexové metody nalezněte nejprve přípustné bazické řešení a následně i optimální řešení následující úlohy:

$$
\begin{aligned}
\max 4x_1 + x_3 + x_4 & \\
8x_1 - 5x_3 - x_4 &= 40 \\
4x_2 - x_3 - x_4 &= 24 \\
x_3 + x_5 &= 8 \\
x_6 - 2x_3 + x_4 &= 8 \\
x_1, \ldots, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$