VELKÁ PÍSEMKA Z OPTIMALIZAČNÍCH METOD

Hodně štěstí!

Písemku vypracovávejte samostatně a bez vlastních poznámek. Můžete však použít dostatečně historické kalkulačky. Každý příklad je za **6 bodů**.

Nezapomeňte všude **uvádět postup**. Může vás to zachránit v případě numerické chyby. Všechna tvrzení je třeba **řádně zdůvodnit**, věty z přednášky či cvičení však dokazovat nemusíte, vždy pouze uveďte, co a kde používáte.

Příklady mohou být rozdílně složité a proto doporučujeme nejdříve pročíst všechna zadání a začít od těch, které vám budou připadat jednodušší.

D: Mějme mnohostěn $P \in \mathbb{R}^n$ a nadrovinu h. Podle průniku s mnohostěnem označujeme nadrovinu h jako:

- **tečnou**, pokud celé P leží v jednom z uzavřených poloprostorů určených h a průnik $P \cap h$ je neprázdný,
- **sečnou**, pokud je průnik P s každým z otevřených poloprostorů určených h neprázdný, a nebo
- **mimoběžnou**, pokud h není ani tečná ani sečná.

Původní program:	*V duálu bude:*
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i-tá podmínka má $\leq$ i-tá podmínka má $\geq$ i-tá podmínka má $=$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	j-tá podmínka má $\geq$ j-tá podmínka má $\leq$ j-tá podmínka má $=$

Příklad první Zformulujte celočíselný lineární program pro NP-úplný problém MaxCut. Máme zadaný graf s kladně ohodnocenými hranami a chceme najít rozdělení vrcholů do dvou skupin takové, že celková váha hran vedoucích mezi skupinami je co největší. Jinými slovy hledáme největší hranový řez v grafu.

Příklad druhý Máme mnohostěn v $\mathbb{R}^4$ určený jako konvexní obal této množiny vrcholů:

$$(-3, 0, 0, 0) \tag{1}$$
$$(-1, 0, 0, 2) \tag{2}$$
$$(0, 2, 0, 0) \tag{3}$$
$$(1, 4, 1, 0) \tag{4}$$
$$(3, 0, 0, 0) \tag{5}$$

Pro čtveřici vrcholů (1),(2),(3),(4) spočítejte rovnicový popis $\{x \in \mathbb{R}^4 | c^T x = b\}$ nadroviny, na které všechny 4 body leží. Rozhodněte také, je-li tato nadrovina sečná, tečná nebo mimoběžná vůči zadanému mnohostěnu.

Příklad třetí Pro problém vrcholové 3-obarvitelnosti grafu vymyslete nejdříve vhodný celočíselný lineární program. Tento program pouze otestuje, zda-li je zadaný graf 3-obarvitelný.

Pak tento program zrelaxujte a zdualizujte.

Příklad čtvrtý Převeďte úlohu na standardní tvar, formulujte pomocnou úlohu, s její pomocí nalezněte přípustné bazické řešení a z něho optimální řešení.

Poznámka: Plný počet bodů je za nalezení optimálního řešení pomocí alespoň dvou kroků simplexového algoritmu nebo provedení alespoň 3 správných kroků.

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + 4x_2 & \\ 3x_1 - x_2 &\geq 2 \\ 11x_1 - 5x_2 &\geq -2 \\ -x_1 - x_2 &\geq -26 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad pátý Pro zadané LP nalezněte optimální řešení (x_1^*, x_2^*, x_3^*) s využitím komplementarity, když víte, že optimální řešení duálu je $(2, 5, 0)$:

$$\begin{aligned} \max 3x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_3 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$