

12. cvičení z PaSti – 2022-05-03

Tahák

- Na počítání $\Phi(x)$: <https://t.ly/JRQ2>
- Mathematica: `CDF[NormalDistribution[0,1], x], InverseCDF[...]`

Intervalové odhady

1. Máme jedno měření $X \sim N(\mu, 1)$. (Parametrem je tedy $\vartheta = \mu$.)

- Najděte jednostranný intervalový odhad $\mu \in [t, +\infty)$ se spolehlivostí 95 %.
- Najděte oboustranný intervalový odhad pro μ se spolehlivostí 95 %.
- Místo jednoho měření jich provedeme n (pochopitelně nezávislých). Jaký bude teď intervalový odhad pro μ ?
- Nechť X má stále střední hodnotu μ a rozptyl 1, ale není už nutně normální. Co se změní?

Bodové odhady

Statistika $T(x_1, \dots, x_n)$ je *nestranným bodovým odhadem* parametru $\vartheta \Leftrightarrow \mathbb{E}(T) = \vartheta$.

2. Dokažte, že výběrový průměr $s_n = (x_1 + \dots + x_n)/n$ je nestranným odhadem střední hodnoty.

3. Odhadněme rozptyl statistikou $q_n = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - s_n)^2$. Ukažte, že to není nestranný odhad, a navrhněte jeho opravu.

Podmíněná hustota

4. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
- Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

5. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y . V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X .

- (a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci podmíněná hustota $f_{X|Y}$.
- (b) Najděte marginální hustotu f_X .
- (c) Pomocí f_X spočítejte $\mathbb{E}(X)$.
- (d) Spočítejte $\mathbb{E}(X)$ pomocí vztahu $X = Y \cdot (X/Y)$.

6. Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem 1 stranami nějakého trojúhelníku.)

- (a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.
- (b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.
- (c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.