# 11. cvičení z PaSti – 2022-04-26

## Tahák

- *Markovova nerovnost:* $P(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)/a$ pro $X \geq 0$, $a > 0$.
- *Čebyševova nerovnost:* $P(|X - \mu| \geq a\sigma) \leq 1/a^2$ pro $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$.
- *Černovova nerovnost:* $P(X \geq t) = P(X \leq -t) \leq \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$ pro $X = X_1, \ldots, X_n$, kde všechna $X_i = \pm 1$ jsou n.n.v. a $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$.
- *Centrální limitní věta:* Pro $X_1, X_2, \ldots$ stejně rozdělené n.v. s konečným $\mu$ a $\sigma$, $Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ platí $Y_n \xrightarrow{d} \Phi$.
- Na počítání $\Phi(x)$: `https://t.ly/JRQ2`

## Aplikace nerovností a Centrální Limitní Věty

**1.** Statistik chce odhadnout průměrnou výsku $h$ (v metrech) lidí v nějaké populaci, pomocí $n$ nezávislých vzorků $X_1, \ldots, X_n$, které vybíráme uniformně náhodně ze všech možnych lidí. Pro odhad použije výběrový průměr $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Odhaduje, že směrodatná odchylka jednoho výběru je nejvýše 1 metr.

(a) Jak velké $n$ má volit, aby směrodatná odchylka $S_n$ byla nejvýše 1 cm?

(b) Pro jaké $n$ zajistí Čebyševova nerovnost, že pravděpodobnost, že $S_n$ se liší od $h$ nejvýše o 5 cm s pravděpodobností alespoň 99 %?

**2.** Označme $S = \sum_{k=0}^{30} \binom{100}{k}$. Označme dále $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, kde $X_i$ je $\pm 1$ s pravděpodobností 1/2 a veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé.

(a) Spočítejte $P(X = k)$ pro každé $k$.

(b) Vyjádřete $S$ pomocí pravděpodobnosti vhodného výroku o $X$.

(c) Použijte Čebyševovu nerovnost a CLV na odhad této pravděpodobnosti.

(d) Vyčíslete $S$ vhodným softwarem a srovnejte.

**3.** Počítání obsahu kruhu náhodným samplováním. Vygenerujeme náhodný bod ve čtverci (obě souřadnice budou mít rozdělení $U(0,1)$). Označíme $X_i$ indikátor jevu „$i$-tý bod leží ve vepsaném kruhu“.

- Určete $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathrm{var}(X_i)$.
- Položte $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $\mathrm{var}(S_n)$.
- Všimněte si, že lze počítat $S_n$ z $S_{n-1}$, $X_n$ a $n$ (nižší nároky na paměť).
- Pro jaké $n$ čekáte, že dostaneme výsledek správně na jedno desetinné místo? Na dvě, tři, …?

**Podmíněná hustota**

**4.** Nechť $X$, $Y$ mají sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.

(b) Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

**5.** Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme $Y$. V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme $X$.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci podmíněná hustota $f_{X|Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu $f_X$.

(c) Pomocí $f_X$ spočtěte $\mathbb{E}(X)$.

(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí vztahu $X = Y \cdot (X/Y)$.

**6.** Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem 1 stranami nějakého trojúhelníku.)

(a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.

(b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.

(c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.