

10. cvičení z PaSti – 2022-04-19

Tahák

- *Sdružené rozdělení:* $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$.
- *Sdružená hustota:* $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$.
- *Marginální hustota:* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$.
- *Nezávislost:* $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.
- *Konvoluce:* Pokud $A = X + Y$, máme $f_A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x - t) dt$.

Spojité vektory

1. Buď Y maximum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.

- Najděte distribuční funkci F_Y .
- Odsud určete hustotu f_Y .
- Spočítejte $\mathbb{E}(Y)$.
- Jak to vyjde pro minimum místo maxima?

Hint: Zkuste to nejprve pro $k = 2$.

2. Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
- Najděte marginální hustotu f_Y a spočítejte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.
- Pro kontrolu spočítejte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla LOTUS).

Konvoluce

3. Buďte $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodně veličiny.

- Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu – jak podle konvolučního vzorce, tak „podle obrázku“.
- Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.
- Jak výsledek ověřit sámkpováním? (Provedte rychlý experiment, např. v Pythonu, nebo jen popište, co byste dělali.)

4. Buďte $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.

- (a) Jaké je rozdělení $X + Y$?
- (b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Podmíněná hustota

5. Necht X, Y mají sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
- (b) Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

6. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y . V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X .

- (a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci podmíněná hustota $f_{X|Y}$.
- (b) Najděte marginální hustotu f_X .
- (c) Pomocí f_X spočítejte $\mathbb{E}(X)$.
- (d) Spočítejte $\mathbb{E}(X)$ pomocí vztahu $X = Y \cdot (X/Y)$.

7. Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem 1 stranami nějakého trojúhelníku.)

- (a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.
- (b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.
- (c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.