9. cvičení z PaSti – 2022-04-12

Tahák

- *Sdružené rozdělení:* $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$.
- *Sdružená hustota:* $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$.
- *Marginální hustota:* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y$.
- *Nezávislost:* $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.
- Dvojné integrály jde prohazovat (Fubiniho věta):

  $$\int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

  Potřeba je, aby se nejednalo o „integrály typu $\infty - \infty$“, neboli $\int_X \int_Y |f(x,y)|$ musí být konečný.
- pro „rozumnou“ množinu A

  $$P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- *Cauchyho rozdělení:* $F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$, *nemá střední hodnotu.*

Samplování

1. Nechť n.v. X má distribuční funkci F, hustotu f, střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Nechť dále $Y = aX + b$.

(a) Jakou střední hodnotu a rozptyl má Y?

(b) Jakou distribuční funkci a hustotu má Y?

(c) Pokud $X \sim N(0,1)$, jak nastavit a a b, aby bylo $Y \sim N(\alpha, \beta^2)$?

(d) Jsou-li Φ a φ distribuční funkce a hustota pro $N(0,1)$, jak vypadá distribuční funkce a hustota pro $N(\mu, \sigma^2)$?

2. *(použijte větu z přednášky)* Nechť $U \sim U(0,1)$. Jak vyrobíte náhodnou veličinu

(a) s rozdělením $U(a,b)$?

(b) s rozdělením $Exp(\lambda)$?

(c) s Cauchyho rozdělením?

(d) s rozdělením $N(0,1)$?

Spojité vektory

3. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).

(a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.

(b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.

(c) Jsou X, Y nezávislé?

(d) Najděte $P(X + Y \le 1)$ a $P(X > Y)$.

4. Buď Y maximum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.

(a) Najděte distribuční funkci F_Y.

(b) Odsud určete hustotu f_Y.

(c) Spočítejte $\mathbb{E}(Y)$.

(d) Jak to vyjde pro minimum místo maxima?

5. Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.

(c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla LOTUS).

6. *(Buffonova jehla)* Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ. Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

Nápověda: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

K procvičení

7. Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[0, 1]$ a $[1, 0]$, tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
- Najděte marginální hustotu f_Y.
- Najděte podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
- Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ a podle věty o rozboru možností spočtěte $\mathbb{E}(X)$ (pomocí $\mathbb{E}(Y)$).
- Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí předchozí části a symetrie.