8. cvičení z PaSti – 2022-04-05

Tahák

rozdělení	$F(x)$	$f(x)$	$\mathbb{E}$	var
$Exp(\lambda)$	$1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$N(0,1)$	$\Phi(x)$	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$	0	1
$N(\mu,\sigma^2)$	$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	$\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	μ	σ^2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Exponenciální rozdělení

1. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

2. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s+t \mid X \geq s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Už jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť. Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

3. Nechť $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim Exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

Normální rozdělení

4. Nechť $Z \sim N(0,1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 3σ, neboli spočtěte

- $P(|Z| \leq 1)$
- $P(|Z| \leq 2)$
- $P(|Z| \leq 3)$
- Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

5. Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžarském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.

- Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?
- Jaká je pravděpodobnost, že sněhu napadne 50–70 cm?

Práce s distribuční funkcí

6. Metrový klacek rozlomíme na dva kusy lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části. Jaké rozdělení má X a jakou střední hodnotu?

7. Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p, B pravděpodobnost $1-p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z.

(a) Vyjádřete $\mathbb{E}(Z)$ pomocí $\mathbb{E}(X)$ a $\mathbb{E}(Y)$.

(b) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y.

(c) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y.

K procvičení

8. Střední doba života harddisku je 4 roky. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, viz např. `https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/`.)

(a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?

(c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

9. Buď Y minimum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$. Spočtete $\mathbb{E}(Y)$.

10. Frantovi jsme ve skoku do dálky naměřili 9 metrů, což překonává světový rekord o 5 cm. Při měření jsme se ovšem dopustili chyby s rozdělením $N(0, 0.01)$. Jaká je pravděpodobnost, že byl rekord skutečně překonán?

11. Najděte analogii „pravidla 3σ“, neboli spočtěte $P(|X - \mathbb{E}(X)| < c \cdot \sigma_X)$ pro $c = 1, 2, 3$, pokud:

- X má uniformní rozdělení,
- $X \sim \mathit{Exp}(1)$,
- $X \sim \mathit{Exp}(2)$.