7. cvičení z PaSti – 2022-03-29

Tahák

- Distribuční funkce F_X je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \le x).$$

  V některých případech je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, \mathrm{d}t$ pro vhodnou nezápornou funkci f_X (hustotu X); takovým n.v. se říká *spojité.* Pak platí:
- $P(X \in A) = \int_A f_X(t)\, \mathrm{d}t$.
  Přitom $\int_A f(t)\, \mathrm{d}t$ definujeme jako $\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(t) f(t)\, \mathrm{d}t$, kde 1_A je charakteristická funkce množiny (1 uvnitř, 0 venku).
- $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\ f_X(t)\, \mathrm{d}t$ a obecněji (spojité pravidlo naivního statistika):

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ f_X(t)\, \mathrm{d}t.$$

- Stejně jako pro diskrétní n.v. je $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.
- *Uniformní rozdělení:* $X \sim U(a, b)$, $f_X(t) = 1/(b-a)$ pro $t \in [a, b]$, jinde 0.
- *Exponenciální rozdělení:* $X \sim Geom(\lambda)$, $F_X(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pro $t \ge 0$, jinde 0 (doba čekání na první černou kočku; spojitá analogie geometrického rozdělení).

Distribuční funkce a hustota

1. Pro n.v. X s distribuční funkcí F vyjádřete:

(a) $P(X \in (0, 1])$
(b) $P(X > 0)$
(c) $P(X < 0)$
(d) $P(X \in [0, 1])$

2. Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin

(a) $-X$
(b) $X^+ = \max(0, X)$
(c) $X^- = -\min(X, 0)$
(d) $|X| = X^+ + X^-$

3. Vyřešte předchozí příklad pro hustotu místo distribuční funkce.

4. Buď X náhodná veličina s hustotou $f_X(t) = 1/t^2$ pro $t \geq 1$ a $f_X(t) = 0$ jinak.

(a) Ověřte, že se jedná o hustotu.

(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.

(c) Spočtěte distribuční funkci, F_X.

(d) Buď $Y = 1/X$. Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny Y?

(e) Určete hustotu náhodné veličiny Y. Pojmenujte její rozdělení.

Exponenciální rozdělení

5. Nechť $X \sim \mathit{Exp}(\lambda)$.

(a) Jak vypadá hustota f_X?

(b) Spočítejte střední hodnotu $\mathbb{E}(X)$.

(c) Spočítejte rozptyl $\mathrm{var}(X)$.

Modelování pomocí náhodných veličin

6. Pan Chen Cheng navštívil Prahu a v uniformně náhodný čas se objeví na Staroměstském náměstí. Každou celou hodinu od 9:00 do 23:00 se na orloji objevuje 12 figur apoštolů.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že pan Cheng uvidí apoštoly, aniž by čekal déle než 15 minut.

(b) Co když pan Cheng přijde na Staroměstské náměstí v uniformně náhodném čase po poledni, tj. 12:00–24:00?

7. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu.

(a) Najděte distribuční funkci F_X.

(b) Najděte hustotní funkci f_X.

(c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$, σ_X.

8. Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?