2. cvičení z PaSti – 2022-02-22

Užitečné vztahy pro podmíněnou pravděpodobnost

- *Řetězové pravidlo:* Pokud $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, tak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots P(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

- *Rozbor případů:* Pokud $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak

$$P(A) = \sum_i P(A \mid B_i)P(B_i),$$

  přičemž sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0.

- *Nezávislost:* $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow (P(A|B) = P(A) \vee P(B) = 0)$

Podmíněná pravděpodobnost

1. Jaký je vztah tvrzení $P(A \mid B) > P(A)$ a $P(B \mid A) > P(B)$?

2. Vytáhneme si tři karty z běžného balíčku 32 karet. Označme A_i jev i-tá karta je srdcová. Spočtěte $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

3. *(Paradox Montyho Halla)* V soutěžní hře stojíme na podiu před třemi dveřmi. Za dvojemi je koza (tu nechceme, moc žere), za zbylými auto (to chceme, i když vlastně také moc žere). Vybereme si jedny dveře, ale než je otevřeme, moderátor otevře jedny ze zbylých dveří, ukáže za nimi kozu, a nabídne nám, že můžeme svoji volbu změnit. Máme to udělat? Pomůže to? Uvědomte si, že zadání má (minimálně) následující dvě varianty:

(a) moderátor ví, kde je auto, a tomu přizpůsobí, které dveře otevře;

(b) moderátor si hodí korunou, které dveře otevřít. Kdyby odhalil auto, tak bychom asi prohráli, ale to se zrovna nestalo.

Budeme používat strategii, kdy dveře změníme. Spočítejte pravděpodobnost, že vyhrajeme auto, ve variantách (a), (b).

4. V krabici je b bílých na c černých míčků. Dva hráči střídavě tahají míčky, první, kdo vytáhne bílý míček, prohrál. Jaká je pravděpodobnost, že prohraje první hráč? Najděte rekurenci.

5. Alice má n mincí, Bob $n + 1$. Oba hodí všemi svými mincemi a spočítají, komu padne kolikrát panna. Pravděpodobnost, že Bobovi padla vícekrát, je $1/2$. (Návod: Bob si dá jednu minci stranou a napřed spočítá těch n ostatních, teprve pak připočte tu poslední.)

6. Pro plánování výletu do Krkonoš používáme českou a polskou předpověď počasí. Každá nám dá binární výsledek *hezky/ošklivo* a má pravděpodobnost úspěchu $p \in [0, 1]$; obě předpovědi jsou nezávislé. Používáme je takto: pokud se shodují, věříme jim, pokud ne, hodíme si korunou. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodneme správně?

Bonusy

7. *(Prosecutor's fallacy)* Paní C. umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je $1/8500$. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C. je nevinná, je $1/8500^2$, což je hodně málo. Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

8. *(Simpsonův paradox)* V této úloze budeme mít bonbony dvou druhů: dobré červené a nedobré zelené. Bonbony ale vybíráme z nádoby poslepu (nebo jsme barvoslepí). Rozhodněte, zda se může stát následující podivnost:

- Při vytahování bonbonu z bílé krabice máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černé krabice.
- Při vytahování bonbonu z bílého sáčku máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černého sáčku.
- Pokud přesypeme bonbony z bílého sáčku do bílé krabice (a z černého do černé krabice), tak budeme mít lepší pravděpodobnost vytažení dobrého bonbonu v černé krabici.

9. *(Bertrandův paradox)* Rovnostrannému trojúhelníku se stranou 1 opíšeme kružnici, na té vybereme náhodnou tětivu. Jaká je pravděpodobnost, že délka tětivy je větší než 1?

K procvičení

10. Logická formule $A \implies B$ je ekvivalentní obměně $\neg B \implies \neg A$. Budeme se zabývat analogiemi zahrnujícími pravděpodobnost.

(a) Ukažte, že pokud $P(B \mid A) = 1$, tak také $P(A^c \mid B^c) = 1$.

(b) Ukažte, že je však možné, aby $P(B \mid A) \doteq 1$, ale $P(A^c \mid B^c) \doteq 0$.

11. Házíme dvakrát mincí. Je větší pravděpodobnost, že dvakrát padne panna, za předpokladu, že první hod byla panna, *nebo* že dvakrát padne panna, za předpokladu, že některý hod byla panna?

12. Máme k nádob, v každé z nich a bílých a b černých míčků. Z první vybereme náhodný míček, vhodíme do druhé. Pak z ní vybereme náhodný míček, vhodíme do třetí, atd. Jaká je pravděpodobnost, že z poslední nádoby vytáhneme bílý míček?

13. Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?