1. cvičení z PaSti – 2022-02-15

Opakování diskrétní pravděpodobnosti

- Množina *elementárních jevů* Ω (nejvýše spočetná)
- Množina *jevů* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- *Pravděpodobnost* $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\})$ … z toho speciálně $P(\emptyset) = 0$
- *Podmíněná pravděpodobnost* $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$, pokud $P(B) \neq 0$

Na rozehřátí

1. Házíme 10 mincemi (neřekneme-li jinak, vždy myslíme poctivými a rozlišitelnými). Jaká je pravděpodobnost, že na aspoň dvou padne vorel? Jak vypadá pravděpodobnostní prostor?

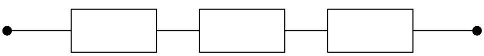
2. Náhodně uspořádáme množinu $\{1, \ldots, n\}$. Jaká je pravděpodobnost, že na prvním místě je 1? Jak vypadá pravděpodobnostní prostor?

3. Házíme kostkou, při šestce házíme znovu. Jaká je pravděpodobnost, že hodíme nejvýše třikrát? Jak vypadá pravděpodobnostní prostor?

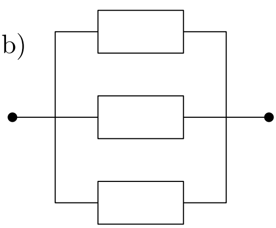
4. Chceme spravedlivě rozlosovat mezi dvěma lidmi, ale máme jen cinknutou minci, kde padá vorel s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Jak to udělat? Co když p neznáme?

5. Každý obdélník na obrázku je součástka, která se může porouchat s pravděpodobností p. Přesněji řečeno porucha znamená, že skrz součástku neteče proud. Poruchy součástek jsou na sobě nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že stále poteče proud mezi dvěma puntíky?

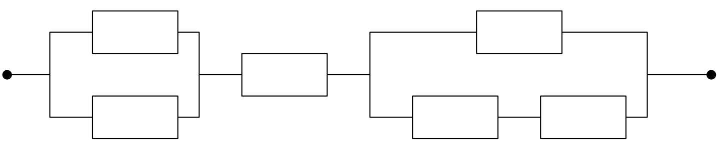
(a)



(b)



(c)



Podmíněná pravděpodobnost

6. Hodíme korunou a dvoukorunou, na každé z nich padá panna s pravděpodobností p.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna na koruně?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna aspoň na jedné minci?

Je bez počítání jasné, která pravděpodobnost je větší?

7. Král země má právě jednoho sourozence. Jaká je pravděpodobnost, že král má bratra? (Ujasněte si všechny předpoklady, které používáte! Co jsou elementární jevy?)

8. Král udělí milost dvěma ze tří vězňů (a vybere náhodně). Jednomu z nich dozorce nabídl, že mu řekne jméno jednoho z druhých dvou vězňů, který bude propuštěn. Vězeň ale odmítl: „pak bych měl pravděpodobnost propuštění jen 1/2, teď ji mám 2/3.“ Má pravdu?

Bonusy

9. Na stole leží dvě obálky, o kterých víme, že v každé z nich je nějaký (nenulový, celočíselný) počet stokorun, v obou jiný. Máme dovoleno jednu obálku otevřít a pak se rozhodnout, zda si necháme tu, nebo tu druhou. Pokud chceme získat obálku s vyšším obnosem, můžeme ji získat s pravděpodobností větší než 1/2? (Nápověda na poslední stránce.)

10. Máme k nádob, v každé z nich a bílých a b černých míčků. Z první vybereme náhodný míček, vhodíme do druhé. Pak z ní vybereme náhodný míček, vhodíme do třetí, atd. Jaká je pravděpodobnost, že z poslední nádoby vytáhneme bílý míček?

11. V urně je a černých a b bílých míčků. Postupně z ní (bez vracení) taháme míčky. Jaká je pravděpodobnost, že první vytažený míček je černý? Druhý, třetí, …?

Domácí úkol

12. V krabici se 100 bateriemi jsou čtyři vybité.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že když vybereme náhodně tři z nich do čelovky, tak bude fungovat? (Musí být všechny v pořádku.)

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budou aspoň dvě ze tří v pořádku?

(c) Třikrát vytáhneme náhodnou baterii, změříme a (protože je v pořádku) tak ji hodíme zpět. S jakou pravděpodobností se to stane?

Bez počítání: je vyšší pravděpodobnost (a) nebo (c)?

Na procvičení

13. Házíme mincí, dokud nepadne orel, na každý hod dostaneme novou minci. (Jaká je pravděpodobnost, že získáme k mincí?) Pak všechny získané mince hodíme najednou, pokud na každé z mincí padne orel, můžeme si je všechny nechat. Jaká je pravděpodobnost, že se to stane?

14. Hodíme dvakrát kostkou. Označíme

- SD jev „součet hozených čísel je 10“,
- PS jev „první hod padla šestka“ a
- NS jev „v některém hodu padla šestka“ (možná v obou).

Spočtěte pravděpodobnosti daných jevů a všechny podmíněné pravděpodobnosti.

15. Označme Z jev „Kvído si během příštích dvanácti měsíců nastaví automatické zálohování důležitých souborů“ a D jev „Kvído během příštích dvanácti měsíců přijde o nějaký důležitý soubor“.

(a) Myslíte, že je větší $P(Z \mid D)$ nebo $P(Z \mid D^c)$?

(b) Myslíte, že je větší $P(D \mid Z)$ nebo $P(D \mid Z^c)$?

(c) Podle definice ověřte, zda váš tip je matematicky možný.

(d) Zamyslete se nad tím, proč.

Jak experimentovat v Pythonu

```python
# https://docs.python.org/3/library/random.html
# Nepoužívejte pro šifrování!
import random

# https://docs.python.org/3/library/itertools.html
import itertools

# Generuje náhodné celé číslo 1 <= x <= 10:
x = random.randint(1, 10)
print(x)

# Alternativa, pokud máte rádi pythoní range(...):
x = random.randrange(1, 11)
print(x)

# Generuje náhodný prvek dané neprázdné posloupnosti:
drink = random.choice([
    "světlé pivo",
    "tmavé pivo",
    "slivovice",
    "zelený čaj",
    "černý čaj",
    "bílý čaj",
    "mléko",
    ])
print(drink)

# Výsledek 'B' je třikrát pravděpodobnější než 'A':
print(random.choice(['A', 'B', 'B', 'B']))

# Vrátí seznam k náhodných prvků z dané sekvence (mohou se opakovat):
print(random.choices(['A', 'B', 'C'], k=5))

# Také můžeme určit váhy jednotlivých prvků:
print(random.choices(['A', 'B', 'C'], weights=[1, 1, 4], k=5))

# Výběr bez opakování:
print(random.sample(['w', 'x', 'y', 'z'], k=2))
print(random.sample(['w', 'x', 'y', 'x'], k=2))  # dvě různá 'x'

# Náhodná permutace:
my_list = ['a', 'b', 'c', 'd']
print(random.sample(my_list, k=len(my_list)))
```

```python
# Destruktivní náhodná permutace:
random.shuffle(my_list)
print(my_list)

# Inicializace počátecního stavu generátoru
random.seed(42)

# Nebo můžeme chtít pokaždé jiný počáteční stav
random.seed()

# Generování všech možností (vrací iterable):
print(list(itertools.permutations([1, 2, 3])))
print(list(itertools.combinations('ABCD', 2)))
print(list(itertools.combinations_with_replacement('ABCD', 2)))

# Kombinační číslo "n nad k" v Pythonu 3.8+:
print(math.comb(n, k))

# Ve starším Pythonu jde použít scipy:
# import scipy.special
# scipy.special.comb(n, k, exact=True)
```

Řešení baterií hrubou silou (projitím celého PP prostoru)

```python
import itertools

N = 12      # počet baterií
V = 4       # počet vybitých
baterky = [0]*V + [1]*(N-V)

celkem = 0  # celkový počet možností
a = 0       # kolik z nich splňuje (a)
b = 0       # kolik z nich splňuje (b)

for vyber in itertools.combinations(baterky, 3):
    celkem += 1
    pocet_ok = sum(vyber)
    if pocet_ok == 3:
        a += 1
    if pocet_ok >= 2:
        b += 1

print(f'(a) P={a/celkem:.3f}')
print(f'(b) P={b/celkem:.3f}')
```

Aproximace řešení baterií náhodnými pokusy

```
import random
random.seed()

N = 12       # počet baterií
V = 4        # počet vybitých
baterky = [0]*V + [1]*(N-V)

pokusu = 10000    # kolik provedeme pokusů
a = 0        # kolik z nich splňuje (a)
b = 0        # kolik z nich splňuje (b)

for _ in range(pokusu):
    vyber = random.sample(baterky, k=3)
    ok = sum(vyber)
    if ok >= 3:
        a += 1
    if ok >= 2:
        b += 1

print(f'(a) P={a/pokusu:.3f}')
print(f'(b) P={b/pokusu:.3f}')
```

Nápověda k problému s obálkami: Vytáhneme minci a házíme, dokud nepadne panna. Označíme X celkový počet hodů (včetně posledního, tj. $X \geq 1$). Pokud v naší obálce je k stokorun, tak si obálku necháme, pokud $X < k$. Jaká je pravděpodobnost, že získáme obálku s vyšší částkou?