LA2 – cvičení 9 – 2022-04-13

Tahák

- *Jordanova buňka* $J_k(\lambda)$ je matice $k \times k$ tohoto tvaru:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

  Jediné vlastní číslo je λ o algebraické násobnosti k a geometrické násobnosti 1.
- *Jordanův tvar matice:* na diagonále jsou Jordanovy buňky, jinde nuly.
- Ke každé matici existuje podobná v Jordanově tvaru. Až na permutaci buněk je určena jednoznačně.
- Reálná symetrická matice má všechna vlastní čísla reálná.
  Navíc má ortonormální bázi z vlastních vektorů.

Jordanův tvar

1. Dokažte, že $J_k(\lambda)$ má jediné vlastní číslo λ.
2. Dokažte, že $J_k(\lambda)$ má jediný vlastní vektor (až na skalární násobky).
3. Jak vypadají mocniny Jordanovy buňky? Pokud nevíte, jak na to, zkuste to pro J_2 a J_3.

Fibonacciho čísla

4. Fibonacciho čísla definujeme takto: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n \geq 2$.
   a) Najděte matici $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takovou, že $F(f_i, f_{i+1})^{\mathrm{T}} = (f_{i+1}, f_{i+2})^{\mathrm{T}}$.
   b) Nahlédněte, že $F^n(0,1)^{\mathrm{T}} = (f_n, f_{n+1})$.
   c) Diagonalizujte matici F a pomocí toho vyjádřete F^n.
   d) Nalezněte explicitní vzorec pro f_n.

5. Jiná cesta k témuž výsledku:
   a) Uvažte množinu P všech posloupností, které splňují $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ pro všechna $n \geq 2$.
   b) Dokažte, že P tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
   c) Dokažte, že $\dim P = 2$.
   d) Najděte všechny exponenciální posloupnosti $x_i = \alpha^i$, které leží v P.
   e) Ukažte, že tyto posloupnosti tvoří bázi P.
   f) Vyjádřete Fibonacciho posloupnost v této bázi.

6. Rozmyslete si, jak tyto metody fungují pro jiné rekurentní posloupnosti, ve kterých je každý člen lineární kombinací k předchozích členů.

Kocourkovská politika

7. V Kocourkově fungují tři politické strany, a to Anarchisté (A), Bláhoví (B) a Cílevědomí (C). Platí následující: Z voličů strany A volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k B přejde 5 % a k C dokonce 20 %. Z voličů B přejde k A rovných 20 % a k C také 20 %. Nakonec, z voličů C zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi A a B. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Vlastní čísla grafů

Mějme neorientovaný graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň d. Grafu přiřadíme matici $P = A/d$, kde A je matice sousednosti. Matice P je reálná symetrická, takže má reálná vlastní čísla $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k$. Těm se říká vlastní čísla grafu.

8. Najděte vlastní čísla a vektory pro matici grafu C_3.

9. Najděte vlastní čísla a vektory pro matici grafu C_4.

10. Dokažte, že každý graf má vlastní číslo 1.

11. Dokažte, že vlastní číslo 1 má násobnost 1 právě tehdy, když je graf souvislý.

12. Dokažte, že graf má vlastní číslo -1 právě tehdy, když je bipartitní.

13. Dokažte, že všechna vlastní čísla grafu leží mezi -1 a 1.

14. Jak vypadají vlastní čísla a vektory grafu C_n?

15. Jak vypadají vlastní čísla a vektory grafu K_n?