LA2 – cvičení 8 – 2022-04-06

Tahák

- *Podobnost matic:* $A \sim B \Leftrightarrow A = SBS^{-1}$ pro nějakou regulární matici S (reprezentují totéž lineární zobrazení vůči jiným bázím).
- Podobné matice mají stejná vlastní čísla se stejnými alg. i geom. násobnostmi. Také mají stejnou hodnost, stopu i determinant.
- Matice A je *diagonalizovatelná*, pokud $A \sim \Lambda$ pro nějakou diagonální matici Λ. Pak $A = S\Lambda S^{-1}$, kde sloupce S jsou vlastní vektory a diagonála Λ vlastní čísla.
- Ekvivalentní podmínka: A má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.
- Postačující podmínka: A má n různých vlastních čísel.

Podobnost matic

1. Dokažte, že relace $\sim$ je ekvivalence na $\mathbb{R}^{n \times n}$.
2. Co s čtvercovou maticí udělá násobení diagonalní maticí zleva/zprava?
3. Jak se na matici A projeví transformace SAS^{-1}, kde S je matice elementární řádkové úpravy?
4. Najděte všechny matice, které jsou podobné jen samy sobě.

Diagonalizace

5. Diagonalizujte matice (zapište jako $S\Lambda S^{-1}$ pro Λ diagonální a S regulární):

$$A = \begin{pmatrix} 41 & -30 \\ 56 & -41 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Nalezněte matici, jejíž vlastní čísla jsou 1, 2 a vlastní vektory $(3,4)^{\mathrm{T}}$ a $(5,7)^{\mathrm{T}}$.
7. Spočtěte matice A^{100} a A^{333} pro matici A definovanou výše.
8. *Odmocnina z matice:* Najděte matici Q takovou, že $Q^2 = B$ pro matici B definovanou výše.
9. Je diagonalizace matice jednoznačná?
10. Najděte matici 2×2, která není diagonalizovatelná. Může být regulární?
11. Jak vypadají vlastní čísla a vektory matice projekce? Je diagonalizovatelná?
12. Mějme diagonalizovatelnou matici $X = S\Lambda S^{-1}$. Jak vypadají vlastní vektory matice X^{T}?
13. Ukažte, že pro diagonalizovatelnou matici A platí $A \sim A^{\mathrm{T}}$.

Fibonacciho čísla

14. Fibonacciho čísla definujeme takto: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n \geq 2$.
    a) Najděte matici $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takovou, že $F(f_i, f_{i+1})^{\mathrm{T}} = (f_{i+1}, f_{i+2})^{\mathrm{T}}$.
    b) Nahlédněte, že $F^n(0,1)^{\mathrm{T}} = (f_n, f_{n+1})$.
    c) Diagonalizujte matici F a pomocí toho vyjádřete F^n.
    d) Nalezněte explicitní vzorec pro f_n.

15. Jiná cesta k témuž výsledku:
    a) Uvažte množinu P všech posloupností, které splňují $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ pro všechna $n \geq 2$.
    b) Dokažte, že P tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
    c) Dokažte, že $\dim P = 2$.
    d) Najděte všechny exponenciální posloupnosti $x_i = \alpha^i$, které leží v P.
    e) Ukažte, že tyto posloupnosti tvoří bázi P.
    f) Vyjádřete Fibonacciho posloupnost v této bázi.

16. Rozmyslete si, jak tyto metody fungují pro jiné rekurentní posloupnosti, ve kterých je každý člen lineární kombinací k předchozích členů.