LA2 – cvičení 2 – 2022-02-23

Opakování z přednášky

- Systém vektorů $z_1, \ldots, z_n$ je *ortogonální* $\Leftrightarrow \langle z_i, z_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$.
- Systém je *ortonormální,* pokud navíc $\langle z_i, z_i \rangle = 1$ pro všechna i.
- *Fourierův rozvoj* vektoru x vzhledem k ortonormální bázi $z_1, \ldots, z_n$:

$$x = \sum_{1 \le i \le n} \langle x, z_i \rangle \, z_i.$$

- *Gramova-Schmidtova ortogonalizace* (vlastně ortonormalizace):

$$y_i' = x_i - \sum_{j<i} \langle x_i, y_j \rangle \, y_j, \quad y_i = \frac{y_i'}{\|y_i'\|}.$$

- *Ortogonální doplněk* v prostoru V: $M^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in M : x \perp y\}$.

Ortogonální a ortonormální systémy

1. Mějme nějaký ortogonální systém vektorů $v_1, \ldots, v_n$. Je tento systém lineárně nezávislý?
2. Mějme v $\mathbb{R}^2$ systém $z_1 = (1,1)^{\mathrm{T}}/\sqrt{2}$, $z_2 = (-1,1)^{\mathrm{T}}/\sqrt{2}$. Ověřte, že je to ortonormální báze. Vyjádřete vektor $(a,b)^{\mathrm{T}}$ v této bázi.
3. Nechť $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^3$ vzhledem k nějakému skalárnímu součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Spočítejte hodnotu $\left\langle (3,1,1)^{\mathrm{T}}, (2,1,6)^{\mathrm{T}} \right\rangle$.
4. Doplňte vektor $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ na ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$.

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

5. Co se stane, když G.-S. ortogonalizace:
   a) dostane na vstupu lineárně závislé vektory?
   b) dostane na vstupu ortogonální vektory?
   c) dostane na vstupu ortonormální vektory?
   d) dostane na vstupu $-x_i$ místo x_i? Jak se změní výstup?
6. Najděte v $\mathbb{R}^4$ ortonormální bázi podprostoru generovaného vektory $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $(1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.
7. Nad $\mathbb{C}^3$ ortonormalizujte $(\mathrm{i},\mathrm{i},\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$, $(0,\mathrm{i},\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$, $(0,0,\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$.

Ortogonální doplněk

8. V $\mathbb{R}^3$ najděte ortogonální doplněk podprostoru generovaného vektory $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $(0,2,1)^{\mathrm{T}}$.